全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年中国矿业大学

（徐州）643数学分析考研精品资料

策划：辅导资料编写组

真题汇编 直击考点

考研笔记 突破难点

核心题库 强化训练

模拟试题 查漏补缺

高分学长学姐推荐

【初试】2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清PDF电子版支持打印，考研首选资料。

一、中国矿业大学（徐州）643数学分析考研真题汇编及考研大纲

1. 中国矿业大学（徐州）643数学分析2003-2013年考研真题，暂无答案。

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

2. 中国矿业大学（徐州）643数学分析考研大纲

①2023年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研大纲。

②2022年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研大纲。

说明：考研大纲给出了考试范围及考试内容，是考研出题的重要依据，同时也是分清重难点进行针对性复习的首选资料，本项为免费提供。

二、2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研资料

3. 《数学分析》考研相关资料

（1）《数学分析》[笔记+课件+提纲]

①中国矿业大学（徐州）643数学分析之《数学分析》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（徐州）643数学分析之《数学分析》本科生课件。

说明：参考书配套授课PPT课件，条理清晰，内容详尽，版权归属制作教师，本项免费赠送。

③中国矿业大学（徐州）643数学分析之《数学分析》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《数学分析》考研核心题库（含答案）

①中国矿业大学（徐州）643数学分析考研核心题库之填空题精编。

②中国矿业大学（徐州）643数学分析考研核心题库之计算题精编。

③中国矿业大学（徐州）643数学分析考研核心题库之证明题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习首选资料。

（3）《数学分析》考研模拟题[仿真+强化+冲刺]

①2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习首选。

③2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺首选资料。

三、电子版资料全国统一零售价

4. 本套考研资料包含以上一、二部分（高清PDF电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024 年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5．中国矿业大学（徐州）643 数学分析考研初试参考书

数学分析(上、下册，第四版)，华东师范大学数学系编，高等教育出版社出版。

五、本套考研资料适用学院和专业及考试题型

数学学院：数学/人工智能/统计学

选择题 15%，填空题 15%，计算题 30%，证明题 40%

目录

2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析备考信息

中国矿业大学（徐州）643数学分析考研初试参考书目

数学分析(上、下册，第四版)，华东师范大学数学系编，高等教育出版社出版。

中国矿业大学（徐州）643数学分析考研招生适用院系及考试题型

数学学院：数学/人工智能/统计学

选择题15%，填空题15%，计算题30%，证明题40%

中国矿业大学（徐州）643 数学分析 2003 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学 2003 年硕士生招生入学考试试题（三小时）

科目代码：313　　科目名称：数学分析

一．（15分）利用闭区间套定理证明数列的柯西收敛准则

二（12分）证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

三．（10分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足：$\int_0^x t f(x-t)dt=\int_0^{x^2} e^{t^2}dt$，$(x\geq 0)$

求：$f(x)$

四．（10分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足：对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 都有

$$f(x^2)=f(x)$$

求证：$f(x)$ 为常数.

五（10分）由拉格朗日中值定理有

$$\ln(1+x)-0=\frac{x}{1+\theta x}$$

求证：$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$

六（10分）计算不定积分 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$，$(a>0)$

试题必须随答卷一起交回

39

七（10分）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$f(x)\equiv 0\ (x\in[a,b])$ 充分必要条件是

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$$

八（15分）计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin x\,dx \quad (0<\alpha<\beta)$$

（说明运算步骤的理论依据）

九.（12分）设$z=f(x,y)$，$x=uv$，$y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$

试变换方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$ 为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=(u^2+v^2)$$

十（10分）设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$在$(0,0)$点偏导数存在但不可微。

十一（12分）设函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛，而且对每个自然数n，$f_n(x)$在I上有界，求证：$\{f_n(x)\}$在I上一致有界。

共2页 第1页

试题必须随答卷一起交回

40

中国矿业大学2003年硕士生招生入学考试试题(三小时)

科目代码:313　　科目名称:数学分析

十二(12分) 设正项级数 $\sum a_n$ 收敛,并且

$a_{n+1} \le a_n \quad (n=1,2,\cdots)$

求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$

十三(12分) 设 Σ 为封闭曲面, $\vec{l}$ 为一固定方向, $\vec{n}$ 为 Σ 上的外法线方向, $\cos(\vec{n},\vec{l})$ 为 $\vec{n}$ 与 $\vec{l}$ 的夹角的余弦. 求证

$$\oiint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{n},\vec{l})\,dS = 0$$

试题必须随答卷一起交回

41

中国矿业大学 2004 年硕士生入学考试试题（三小时）

科目代码：313　　科目名称：数学分析

一、求解下列各题（每小题 5 分，共计 30 分）：

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{(n-1)x}{n}\right]$，$x\in R$

3. 求不定积分：$\int |x| e^x\,dx$

4. 计算重积分 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,dx\,dy$，其中 D 为直线 $x=0$，$y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域。

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$　求 $f'(x)$

6. 设 A 是光滑闭曲线 c 围成区域的面积，$(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是曲线 C 外法线的方向余弦，计算曲线积分 $\oint_C [x\cos\alpha+y\cos\beta]\,ds$

二、(10 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{x^2 e^{p(x-1)}+ax+b}{1+e^{p(x-1)}}$，$x\in R$

确定 a, b 的值，使 $f(x)$ 可导，并求 $f'(x)$；

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $U_+(x_0)=[x_0,x_0+\delta)$ 连续，在 $U_+^\circ(x_0)=(x_0,x_0+\delta)$ 可导，证明：如果导数的右极限 $f'(x_0+0)$ 存在，则右导数 $f'_+(x_0)$ 也存在，且 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$；

四、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $2\int_0^{\frac{1}{2}} x f(x)\,dx=f(1)$，证明在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=-\dfrac{1}{\xi}f(\xi)$；

五、(15 分) 证明函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要

试题必须随答卷一起交回

193

中国矿业大学（徐州）643 数学分析考研大纲

2023 年中国矿业大学（徐州）643 数学分析考研大纲

643	数学分析	数学分析（上、下册，第四版），华东师范大学数学系编，高等教育出版社出版。	**一、考试目的与要求** 掌握函数概念及性质、数列极限的概念及计算；掌握实数基本定理、函数极限概念理论及计算；掌握函数连续性概念、理论；掌握导数与微分的概念、几何意义及计算；掌握一元函数中值定理及应用；掌握不定积分计算、定积分计算及应用；掌握数值级数审敛法、反常积分审敛法；掌握函数列与函数项级数收敛概念和判别方法；掌握幂级数基本概念、基本性质和基本理论；了解傅里叶级数基本概念、基本性质和基本理论；多元函数的极限与连续；多元函数微分学；了解隐函数定理；掌握含参变量积分、变限积分和线面积分。 **二、考试范围** 1. 函数： 实数概述，区间与邻域，函数概念，有界函数，单调函数，奇函数和偶函数，周期函数，复合函数，反函数，基本初等函数，初等函数。 2. 数列极限： 数列极限定义，收敛数列的性质及运算，单调有界数列极限存在定理，两个重要极限。 3. 实数的基本定理： 确界存在定理，区间套定理，Cauchy 准则，聚点原理，有限覆盖定理，上下极限。 4. 函数极限： 极限定义、性质，Heine 定理，单侧极限，Cauchy 准则，无穷小量及其阶的比较，记号 o， O，～，广义极限，无穷大量及其阶的比较。 5. 函数的连续性： 函数在一点连续性，单侧连续，间断点及其分类，函数在区间上的连续性，连续函数的局部有界性，保号性，有理运算。复含函数连续性，有齐闭区间上连续函数的性质，反函数连续性，初等函数的连续性。 6. 导数与微分： 导数定义，单侧导数，导函数，导数的几何意义，无穷大导数，和、差、积、商的导数，反函数的导数，复合函数的导数，初等函数的导数；微分概念，微分的几何意义，微分的运算法则，一阶微分形式的不变性，微分在近似计算中的应用，高阶导数与高阶微分，由参量方程所表示的曲线的斜率。7. 中值定理与导数应用： 费马(Fermat)定理，罗尔(Rolle)中值定理，拉格朗日

			(lagrange)中值定理，柯西(Cauchy)中值定理，泰勒(Taylor)定理(泰勒公式及其拉格朗日型余项)，近似计算，函数单调性的判别法，极值，最大值与最小值，曲线的凹凸性、拐点、渐近线，函数图象的讨论，罗比塔(L′ Hospital)法则。 8. 不定积分： 原函数与不定积分概念，基本积分表，线性运算法则，换元积分法，分部积分法，有理函数积分法，三角函数有理式的积分，几种无理函数的积分. 9. 定积分： 定积分定义，几何意义，可积的必要条件，上和、下和及其性质，可积的充要条件，闭区间上连续函数、在闭区间只有有限个间断点的有界函数、单调有界函数的可积性，定积分性质，微积分学基本定理，牛顿—莱布尼茨公式，换元积分法，分部积分法，近似计算。 10. 定积分的应用： 简单平面图形面积，曲线的弧长与弧微分，曲率，已知截面面积函数的立体体积，旋转体积与侧面积，平均值，物理应用(压力、功、静力矩与重心等)。 11. 数项级数： 级数收敛与和的定义，柯西准则，收敛级数的基本性质，正项级数，比较原则，比式判别法与根式判别法，拉贝(Raabe)判别法与高斯判别法，一般项级数的绝对收敛与条件收敛，交错级数，莱不尼茨判别法，阿贝尔(Abel)判别法与狄利克雷(Dirichlet)判别法，绝对收敛级数的重排定理，条件收敛级数的黎曼(Riemann)定理。 12. 反常积分： 无穷限反常积分概念，柯西准则，线性运算法则，绝对收敛，反常积分与数项级数的关系，无穷限反常积分收敛性判别法。 无界函数反常积分概念，无界函数反常积分收敛性判别法。 13. 函数列与函数项级数： 函数列与函数项级数的收敛与一致收敛概念，一致收敛的柯西准则，函数项级数的维尔斯特拉斯(Weierstrass)优级数判别法，阿贝尔判别法与狄利克雷判别法 *，函数列极限函数与函数项级数和的连续性，逐项积分与逐项微分。 14. 幂级数： 阿贝尔第一定理，收敛半径与收敛区间，一致收敛性，收敛性，连续性逐项积分与逐项微分幂级数的四则运算。泰勒级数，泰勒展开的条件，初等函数的泰勒展开近似计算，用幂级数定义正弦、余弦函数。

			15. 傅里叶(Fourier)级数： 三角级数，三角函数系的正交性，傅里叶级数、贝塞尔(Bessel)不等式，黎曼—勒贝格(Riemann-lebesgue)定理，傅里叶级数的部分和公式，按段光滑且以 2π 为周期的函数展开为傅里叶级数的收敛定理，奇函数与偶函数的傅里叶级数，以 2L 为周期的函数的傅里叶级数。 16. 多元函数的极限与连续： 平面点集概念(邻域、内点、界点、开集、闭集、开域、闭域等)。平面点集的基本定理—区域套定理、聚点定理、有限覆盖定理。 二元函数概念。 二重极限，累次极限，二元函数的连续性，复合函数的连续性定理，有界闭域上连续函数的性质。n 维空间与 n 元函数(距离、三角形不等式、极限、连续等)。 17. 多元函数的微分学： 偏导数及其几何意义，全微分概念，全微分的几何意义，全微分存在的充分条件、全微分在近似计算中的应用，方向导数与梯度，复合函数的偏导数与全微分，一阶微分形式的不变性，高阶导数及其与顺序无关性，高阶微分，二元函数的泰勒定理，二元函数极值。 18. 隐函数定理的及其应用： 隐函数概念，隐函数定理，隐函数求导。 隐函数组概念，隐函数组定理，隐函数组求导，反函数组与坐标变换，函数行列式，函数相关。几何应用，条件极值与拉格朗日乘数法。 19. 含参量积分： 含参量积分概念，连续性、可积性与可微性，积分顺序的交换。含参量反常积分的收敛与一致收敛，一致收敛的柯西准则，维尔斯特拉斯判别法，连续性、可积性与可微性，积分顺序的交换， Γ 函数与 B 函数。 20. 重积分： 平面图形面积，二重积分定义与存在性，二重积分性质，二重积分计算(化为累次积分)，二重积分的换元法(极坐标变换与一般变换)。三重积分定义与计算，三重积分的换元法(柱坐标变换、球坐标变换与一般变换)。重积分应用(体积，曲面面积，重心，转动惯量等)。n 重积分。无界区域上及无界函数反常二重积分的收敛性概念。 21. 曲线积分与曲面积分： 第一型和第二型曲线积分概念与计算，格林公式，曲线积分与路径无关条件。曲面的侧，第一型和第二型曲面积分概念与计算，奥斯特罗格拉特斯基一高斯公式，斯托克斯公式、场论初步(场的概念，梯度、散度、旋度）。

			三、试题结构 1. 考试时间：3 小时 2. 试题类型：选择题 15%，填空题 15%，计算题 30%，证明题 40%

2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研核心笔记

《数学分析》考研核心笔记

第1章　实数集与函数

考研提纲及考试要求

考点：实数及其性质：
考点：实数的一些主要性质
考点：绝对值与不等式
考点：几个重要不等式
考点：有界数集确界原理

考研核心笔记

【核心笔记】实数

1. 实数及其性质

回顾中学中关于有理数和无理数的定义.

有理数：$\begin{cases} 能用互质的分数\dfrac{p}{q}(p,q为非负整数，且q\neq 0)表示的数 \\ 有限十进小数或无限十进循环小数表示的数 \end{cases}$

若规定：

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$$

则有限十进小数都能表示成无限循环小数。

当 $x=a_0$ 为整数时，则记为 $x=(a_0-1)9999\cdots$

（1）实数大小的比较

定义1：给定两个非负实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

其中 a_i b_i 为非负整数，$0\le a_i$,$b_i\le 9$ 若由

① $a_k=b_k$，$k=0,1,2,\cdots$ 则称 x 与 y 相等，记为 $x=y$

②若存在非负整数 l，使得 $a_k=b_k$，$(k=0,1,2,\cdots,l)$，而 $a_{l+1}>b_{l+1}$，则称 x 大于 y（或 y 小于 x），分别记为 $x>y$（或 $y<x$）。

规定任何非负实数大于任何负实数；对于负实数 x,y，若按定义1有 $-x>-y$，则称 $y>x$

（2）实数的有理数近似表示

定义 2：设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数，称有理数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似值，而有理数称为 x 的 n 位过剩近似值，$n=0,1,2,\cdots$ 对于负实数

$$\bar{x}_n=x_n+\frac{1}{10^n}$$

$$x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

x 的 n 位不足近似值规定为：

$$x_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{10^n};$$

x 的 n 位过剩近似值规定为：

$$\bar{x}_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

比如 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 则

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的不足近似值；

1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值。

命题设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$，$y=b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$x>y \Leftrightarrow$ 存在非负整数 n，使得 $x_n>\bar{y}_n$

2. 实数的一些主要性质

（1）四则运算封闭性:

（2）有序性:即 $a>b$　$a<b$　$a=b$，必有一个成立。

（3）传递性：即 $a>b$　$,b>c$　$\Rightarrow a>c$

（4）阿基米德性:即 $\forall a,b\in\mathbf{R},\ b>a>0,\ \exists n\in\mathbf{N},\ \ni\ na>b.$

（5）稠密性:有理数和无理数是稠密性的。

（6）实数集的几何表示———数轴:例如：

$$a=b,\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ |a-b|<\varepsilon.$$

$$\forall\varepsilon>0,\ a<b+\varepsilon\ \Rightarrow\ a\le b$$

3. 绝对值与不等式

绝对值定义：$|a|=\begin{cases}a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$

从数轴上看：绝对值就是到原点的距离：

4. 几个重要不等式

（1） $a^2+b^2\ge 2|ab|$, $|\sin x|\le 1$. $|\sin x|\le|x|$.

（2）对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,$$（算术平均值）

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},$$（几何平均值）

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.$$（调和平均值）

$$H(a_i)\le G(a_i)\le M(a_i),$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

（3）伯努利不等式

这是由于对 $\forall\ x>0$ 由二项展开式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n,$$

因此有: $(1+x)^n$ 大于上式右端任何一项.

【核心笔记】数集确界原理

1. 区间与邻域

（1）区间:

$\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)

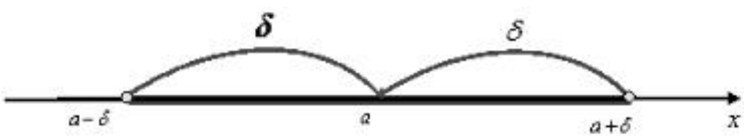
$\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$

半开区间: $\{x|a\le x<b\}$ 称为半开半闭，记为 $[a,b)$

$\{x|a<x\le b\}$ 称为半开半闭，记为 $(a,b]$

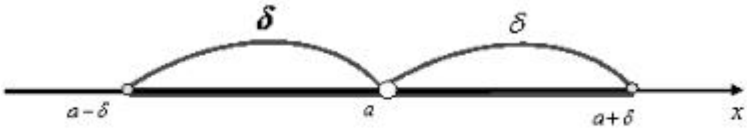
$[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 为无限区间。

（2）邻域 $U_\delta(a)=\{x||x-a|<\delta\}$ 其中 $\delta>0,\ a\in R$ 称为 a 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(a)$



而点集 $U_\delta^0(a)$ 为点 a 的去心 δ 邻域,

即 $U_\delta^0(a)=\{x|a-\delta<x<a\}\cup\{x|a<x<a+\delta\}$



2. 有界数集确界原理

（1）有界数集:

定义(上、下有界,有界)

定义 1：设 S 为 R 中的一个数集。若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\le M(x\ge L)$，则称 S 为有上界（下界）的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界 S（下界）。若数集 S 既有上界又有下界，则 S 为有界集，若 S 不是有界.则称 S 为无界集。

例如，闭区间、(a,b)(a、b 为有限数）、邻域等都是有界数集，集合 $E=\{y|\ y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)\}$ 也是有界数集.

（2）无界数集:对任意 $M>0$，存在 $\bar{x}\in S,\ |\bar{x}|>M$，则称 S 为无界集。

$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 等都是无界数集,例证明集合是无界数集

（3）上下确界

先给出确界的直观定义：若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，其中最小的一个上界我们称它为数集 S 的上确界；同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界。

精确定义

定义 2：设 S 是 R 中的一个数集，若数 η 满足一下两条：

①对一切 $x\in S$ 有 $x\le\eta$，即 η 是数集 S 的上界；

②对任何 $\alpha<\eta$ 存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0>\alpha$（即 η 是 S 的最小上界）

则称数 η 为数集 S 的上确界。记作 $\eta=\sup S$

定义 3：设 S 是 R 中的一个数集，若数 ξ 满足以下两条：

对一切 $x\in S$ 有 $x\ge\xi$，即 ξ 是数集 S 的下界；

对任何 $\beta>\xi$ 存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0<\beta$（即 ξ 是 S 的最大下界）

则称数 ξ 为数集 S 的下确界。记作 $\xi=\inf S$

定理 1.1(确界原理).设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。

数集与确界的关系:确界不一定属于原集合。

（4）确界与最值的关系:设 E 为数集.

①E 的最值必属于 E,但确界未必,确界是一种临界点.

②非空有界数集必有确界(见下面的确界原理),但未必有最值.

③若 $\max E$ 存在,必有 $\max E=\sup E$.

对下确界也有类似的结论.

【核心笔记】函数概念

1. 函数的定义

函数的几点说明.

函数的两要素:定义域和对应法则

约定:定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

2024 年中国矿业大学（徐州）643 数学分析考研辅导课件

《数学分析》考研辅导课件

《数学分析》课件

第一章　实数集与函数

1.1 实数

一 .实数及其性质

二. 绝对值与不等式

一 .实数及其性质:

1.回顾中学中关于有理数和无理数的定义.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正分数}, \\ \text{负分数},\end{cases}\dfrac{q}{p}(p,q\text{为整数且}q\neq 0)\text{或有限小数和无限小数.} \\ \text{无理数:用无限不循环小数表示.}\end{cases}$$

若规定：$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$

则有限十进小数都能表示成无限循环小数.

对正整数　$x=a_0$, 记为 $x=(a_0-1).999\cdots$

对负有限小数（包括负整数）y,先将- y表示成无限小数，再在无限小数前加负号．如: -8=-7.999

2.两个实数的大小关系

1)定义1

给定两个非负实数

$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$, 其中 a_0, b_0 为非负整数，

$a_k, b_k (k=1,2,\cdots)$ 为整数，$0\le a_k\le 9, 0\le b_k\le 9$.

若有 $a_k=b_k, k=1,2,\cdots$, 则称 x 与 y 相等，记为 $x=y$；

若 $a_0>b_0$ 或存在非负整数 l, 使得 $a_k=b_k (k=1,2\cdots l)$ 而 $a_{l+1}>b_{l+1}$

则称 x 大于 y 或 y 小于 x，分别记为 $x>y$ 或 $y<x$.

说明:

自然规定任何非负实数大于任何负实数

2) 通过有限小数比较大小的等价条件

定义2 设 $x=a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ 为非负实数.

称有理数 $x_n = a_0.a_1a_2\ldots a_n$

为实数x的n位不足近似，而有理数

$$\overline{x_n} = x_n + \frac{1}{10^n}$$

称为x的n位过剩近似，n=0, 1, 2, ...

对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$,

其n位不足近似和n位过剩近似分别规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\ldots a_n - \frac{1}{10^n} \quad \text{和} \quad \overline{x_n} = -a_0.a_1a_2\ldots a_n$$

注意：对任何实数x, 有

$$x_0\le x_1\le x_2\le\cdots,$$

$$\overline{x}_0\ge\overline{x}_1\ge\overline{x}_2\ge\cdots$$

命题1 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$,　$y=b_0.b_1b_2\cdots$

为两个实数，则

$x>y \iff$ 存在非负整数 n, 使得 $x_n>\overline{y}_n$

实数的性质

1.实数集R对加,减,乘,除(除数不为0)四则运算是封闭的.即任意两个实数和,差,积,商(除数不为0)仍然是实数.

2.实数集是有序的.即任意两个实数a，b必满足下述三个关系之一: a < b, a = b, a > b .

3.实数集的大小关系具有传递性.即若a ＞ b, b ＞ c,则有a>c.

4.实数具有阿基米德性， 即对任何 $a, b \in R$, 若 $b > a > 0$ 则存在正整数 n, 使得 $na > b$.

5.实数集R具有稠密性.即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

6.实数集R与数轴上的点具有一一对应关系.即任一实数都对应数轴上唯一的一点,反之,数轴上的每一点也都唯一的代表一个实数.

例1 设x, y为实数，证明: 存在有理数r满足: $x < r < y$.

证明

由于$x < y$, 故存在非负整数n，使得$\bar{x}_n < \underline{y}_n$. 令$r = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + \underline{y}_n)$

则r为有理数，且有$x \le \bar{x}_n < r < \underline{y}_n \le y$, 即得$x < r < y$.

例2 设$a, b \in R$, 证明: 若对任何正数ε有$a < b + \varepsilon$, 则$a \le b$.

证明 用反证法．假若结论不成立， 则根据实数的有序性有 $a > b$. 令 $\varepsilon = a - b$, 则 ε为正数且 $a = b + \varepsilon$, 这与假设 $a < b + \varepsilon$矛盾．从而必有 $a \le b$.

二. 绝对值与不等式

绝对值定义:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

从数轴上看的绝对值就是到原点的距离：

绝对值的一些主要性质

1. $|a| = |-a| \ge 0$ 当且仅当 $a = 0$ 时 $|a| = 0$
2. $-|a| \le a \le |a|$
3. $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$; $|a| \le h \Leftrightarrow -h \le a \le h, h > 0$
4. $|a| - |b| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$
5. $|ab| = |a||b|$
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \ne 0$

性质4（三角不等式）的证明：

由性质2　　$-|a| \le a \le |a|$, $-|b| \le b \le |b|$

两式相加　　$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$

由性质 3 上式等价于　　$|a + b| \le |a| + |b|$

把上式的 b 换成 -b 得　　$|a - b| \le |a| + |b|$

由此可推出

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$|A| - \varepsilon < |f(x)| < |A| + \varepsilon$$

几个重要不等式:

(1) $a^2 + b^2 \ge 2|ab|$, $|\sin x| \le 1$, $|\sin x| \le |x|$.

(2) 均值不等式: 对$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$, 记

$$M(a_i) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \text{(算术平均值)}$$

$$G(a_i) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{(几何平均值)}$$

$$H(a_i) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}. \quad \text{(调和平均值)}$$

有平均值不等式: $H(a_i) \le G(a_i) \le M(a_i)$,
等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

(3) Bernoulli 不等式:

$\forall x > -1$, 有不等式 $(1+x)^n \ge 1 + nx$, $n \in \mathbf{N}$.

当 $x > -1$ 且 $x \ne 0$, $n \in \mathbf{N}$ 且 $n \ge 2$ 时,

有严格不等式 $(1+x)^n > 1 + nx$.

证 由 $1 + x > 0$ 且 $1 + x \ne 0$, $\Rightarrow (1+x)^n + n - 1 = (1+x)^n + 1 + 1 + \cdots + 1 >$

$> n\sqrt[n]{(1+x)^n} = n(1+x)$.

$\Rightarrow (1+x)^n > 1 + nx$.

(4) 利用二项展开式得到的不等式:

对$\forall h > 0$, 由二项展开式

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3 + \cdots + h^n,$$

有: $(1+h)^n >$ 上式右端的任何一项.

思考题:

设a、$b \in R$, ε是任意正数, 恒有关系式 $|a-b| < \varepsilon$成立，请问 a、b之间关系如何?

§1.2 数集·确界原理

- 一、区间与邻域
-
- 二、上确界、下确界

一、区间与邻域

1. 集合: 具有某种特定性质的事物的<u>总体.</u>

组成这个集合的事物称为该集合的<u>元素</u>.

$a \in M$, $a \notin M$,

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有限集

$M = \{x \mid x$所具有的特征$\}$ 无限集

若$x \in A$,则必$x \in B$,就说A是B的子集.

记作 $A \subset B$.

数集分类: N----自然数集 Z----整数集

Q----有理数集 R----实数集

数集间的关系: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$.

若$A \subset B$,且$B \subset A$,就称集合A与B相等. $(A = B)$

例如 $A = \{1,2\}$,

$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则 $A = C$.

不含任何元素的集合称为<u>空集.</u> (记作 $\varnothing$)

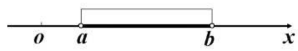
例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$

规定 空集为任何集合的子集.

2. 区间: 是指介于某两个实数之间的全体实数.
这两个实数叫做区间的端点.

$\forall\, a, b \in R$, 且$a < b$.

$\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a,b)



$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a,b]$

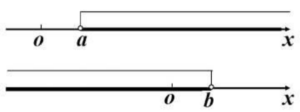
$\{x \mid a \le x < b\}$ 称为半开区间, 记作 $[a,b)$

$\{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间, 记作 $(a,b]$

有限区间

$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x\}$ $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

无限区间



区间长度的定义:

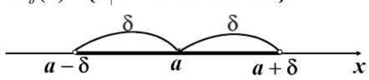
两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

3. 邻域: 设a与δ是两个实数, 且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x - a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域,

点a叫做这邻域的中心, δ叫做这邻域的半径.

$U_\delta(a) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$.



点a的去心的δ邻域, 记作$U^0_\delta(a)$.

$U_\delta(a) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

二 有界集·确界原理

- **1 有(无)界数集:**定义(上、下有界, 有界)
- **数集S有上界** $\Leftrightarrow \exists M \in R, \forall x \in S$有$x \le M$.
- **数集S无上界** $\Leftrightarrow \forall M \in R, \exists x_0 \in S$有$x_0 > M$.
- **数集S有下界** $\Leftrightarrow \exists L \in R, \forall x \in S$有$x \ge L$.
- **数集S无下界** $\Leftrightarrow \forall L \in R, \exists x_0 \in S$有$x_0 < L$.
- **数集S有界** $\Leftrightarrow \exists M \in R^+, \forall x \in S$有$|x| \le M$.
- **数集S无界** $\Leftrightarrow \forall M \in R^+, \exists x_0 \in S$有$|x_0| > M$.

$[a,b]$、(a,b)(a,b为有限数)、邻域等都是有界数集;

集合 $E = \{y \mid y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)\}$也是有界数集.

$(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$等都是无界数集,

集合 $E = \left\{y \mid y = \frac{1}{x}, x \in (0,1)\right\}$也是无界数集.

例 证明集合 $E = \left\{y \mid y = \frac{1}{x}, x \in (0,1)\right\}$ **是无界数集.**

证明:对任意的$M > 0$, $\exists x = \frac{1}{M+1} \in (0,1)$,

$y = \frac{1}{x} \in E$, $y = M + 1 > M$

由无界集定义, E 为无界集.

例1证明数集$N_+ = \{n \mid n$为正整数$\}$有下界而无上界

证明：显然，任何一个不大于1的实数都是N_+的下界，故为N_+有下界的数集.

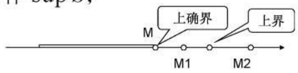
$\forall M$，都$\exists n_0 = [M]+1$，使得$n_0 > M$，则N_+无上界.

注：(1)任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集.

(2)由有限个数组成的数集是有界集.

2 确界:

直观定义:若数集S有上界，则它有无穷多个上界，其中最小的一个上界称为数集S的上确界，记作 $\sup S$；



同样，有下界数集S最大的一个下界称为数集S的下确界，记作 $\inf S$.

确界的精确定义

定义 2 设 S 为 R 中的一个数集.若数η满足：

（i）对一切$x \in S$，有$x \le \eta$，即η是 S 的上界；

（ii）对任何$\alpha < \eta$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$，即η是 S 的最小上界，则称数η为数集 S 的上确界，记作$\eta = \sup S$.

命题 1　$M = \sup E$　充要条件

1）　M是E上界，

2）　$\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E$使得$x' > M - \varepsilon$.

定义 3　设 S 是 R 中的一个数集，若数ξ满足：

（1）对一切$x \in S$，有$x \ge \xi$（即ξ是 S 的下界）；

（2）对任何$\beta > \xi$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 < \beta$（即ξ是 S 的下界中最大的一个），则称数ξ为数集 S 的下确界，记作$\xi = \inf S$.

命题 2　$\xi = \inf S$的充要条件：

1）ξ是 S 下界；

2）$\forall \varepsilon > 0$，$x_0 \in S$，有$x_0 < \xi + \varepsilon$.

例2　设$S = \{x \mid x$为区间$(0,1)$中的有理数$\}$.试按上、下确界的定义验证：$\sup S = 1, \inf S = 0$.

解 先验证$\sup S = 1$：

（i）对一切$x \in S$，显然$x \le 1$，即 1 是S的上界.

（ii）对任何$\alpha < 1$，若$\alpha \le 0$，则任取$x_0 \in S$都有$x_0 > \alpha$；若$\alpha > 0$，则由有理数集在实数集中的稠密性，在$(\alpha, 1)$中必有有理数x_0，即存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$.

类似地可验证$\inf S = 0$

命题 3：设数集A有上（下）确界，则这上（下）确界必是唯一的.

证：设$\eta = \sup A$，$\eta' = \sup A$且$\eta \ne \eta'$，则不妨设$\eta < \eta'$　$\eta = \sup A \Rightarrow \forall x \in A$有$x \le \eta$

$\eta' = \sup A \Rightarrow$对$\eta < \eta'$，$\exists x_0 \in A$使$\eta < x_0$，矛盾.

例 2　(1)　$S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$，则

$\sup S =$ ______，$\inf S =$ _______.

(2)　$E = \{y \mid y = \sin x,\ \ x \in (0, \pi)\}$.

则 $\sup E =$ _______，$\inf E =$ ________.

例3 设数集S有上确界.证明

$\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S$

证　$\Rightarrow$)设$\eta = \sup S \in S$，则对一切$x \in S$有$x \le \eta$，而$\eta \in S$，故η是数集 S 中最大的数，即$\eta = \max S$.

$\Leftarrow$)设$\eta = \max S$，则$\eta \in S$，

（i）对一切$x \in S$有$x \le \eta$，即η是数集 S 的上界；

（ii）对任何$\alpha < \eta$，只须取$x_0 = \eta \in S$，则$x_0 > \alpha$.

从而满足$\eta = \sup S$的定义.

例4　设 A, B为非空数集,满足：$\forall x \in A, \forall y \in B$有$x \le y$.

证明数集 A有上确界, 数集B有下确界,且　$\sup A \le \inf B$.

证：由假设,数集B中任一数y都是数集A的上界,

A中任一数x都是B的下界,

故有确界原理知,数集A有上确界,数集B有下确界.

$\forall y \in B$，y是数集A的一个上界,而由上确界的定义知

$\sup A$　是数集A的最小上界，故有　$\sup A \le y$.

而此式又表明数　$\sup A$　是数集B的一个下界,

故由下确界的定义证得　$\sup A \le \inf B$.

《数学分析》考研复习提纲

数学分析（Ⅰ）

一、 函数

实数概述，绝对值与不等式。

区间与邻域，确界原理。

函数概念，函数的几种表示法，函数的四则运算，复合函数，反函数，基本初等函数，初等函数。

具有某些特性的函数。

二、 数列极限

数列，数列极限的ε-N定义。

收敛数列的性质：唯一性、有界性、保序（号）性、迫敛性、四则运算法则。

数列极限存在的条件。

三、 函数极限（

函数极限的ε-M定义和ε-δ定义，单侧极限。

函数极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性、不等式性质、迫敛性、四则运算。

函数极限存在的条件：归结原则和柯西准则。

两个重要极限。

无穷小量及其阶的比较；记号 **O**，**o**，～；无穷大量及其阶的比较。

四、 函数的连续性

连续性概念，间断点及其分类，在区间上连续的函数。

连续函数的性质：局部有界性、局部保号性、四则运算、复合运算，闭区间上连续函数的性质，反函数的连续性，一致连续性。

初等函数的连续性。

五、导数与微分

导数概念：导数的定义（导数、左导数、右导数以及与连续性间关系）。导数几何意义、物理意义。导函数的概念。

求导法则：导数的四则运算。反函数的导数。复合函数的导数。基本求导法则与公式。

微分：微分概念。微分的运算法则（一阶微分形式的不变性）。

近似计算与误差估计。

高阶导数及运算（注意：莱布尼兹公式）。高阶微分。

参量方程所确定的函数的导数。

六、微分学基本定理与不定式极限

中值定理：费马（**Fermat**）定理——予备定理。中值定理（**Rolle**、**Lagrange**、**Cauchy** 三大中值定理）。导数极限定理。

不定式极限：$\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限。$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限。其它类型的不定式极限（$0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ 等类型）

泰勒定理。带皮亚诺（**Peano**）型余项的泰勒公式。应用（近似计算，求极限）。

七、运用导数研究函数的性质

函数的单调性。极值的必要条件。极值的两个充分条件（第三个充分条件可作选讲内容）。最大值与最小值。

函数的凸性与拐点的概念。函数凸性的判定。函数凸性的应用。

渐近线。函数作图。

方程近似解。

八、实数的一些基本定理

确界与确界存在定理。区间套定理。柯西收敛准则。致密性定理。聚点定理。有限复盖定理。

关于闭区间上连续函数性质的几个定理的严格证明。

九、不定积分

原函数与不定积分概念。基本积分表。线性运算法则。换元积分法。分部积分法。

有理函数积分法。三角函数有理式的积分.几种无理函数的积分。

十、定积分

曲边梯形面积与变力作功——引出定积分概念。定积分定义。定积分的几何意义。可积的必要条件。（达布）上和、下和及其性质。可积的充要条件。

可积的充分条件——可积函数类（闭区间上的连续函数，有有限个间断点的有界函数，单调有界函数）。

定积分的性质：线性运算性质，对区间的可加性、单调性、绝对可积性、积分（第一）中值定理。积分第二中值定理。

微积分学基本定理（原函数存在定理）。**Newton-Leibniz** 公式。定积分的换元法。定积分的分部积分法。

用 $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ 定义对数函数，对数函数与指数函数的基本性质。

2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研核心题库

《数学分析》考研核心题库之填空题精编

1. 下列函数中不是初等函数的是__________.

【答案】$\int_0^x e^{-t^2}dt$

2. 假定数列$\{x_n\}$可用下列递归方式定义：$x_1=\sqrt{6}$，$x_n=\sqrt{x_{n-1}+6}$，$(n=2,3,\cdots)$，请计算$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$=__________.

【答案】3

【解析】$x_1=\sqrt{6}\leqslant 3$，$x_2=\sqrt{x_1+6}\leqslant\sqrt{3+6}=3$，从而由数学归纳法知$x_n\leqslant 3$，$(n=1,2,\cdots)$，于是

$$x_n-x_{n-1}=\sqrt{x_{n-1}+6}-x_{n-1}=\left(3-\sqrt{x_{n-1}+6}\right)\left(\sqrt{x_{n-1}+6}+2\right)\geqslant 0$$

即$\{x_n\}$是单调递增有上界数列，所以存在极限，设其极限为x, 从而$x=\sqrt{x+6}$，解得$x=3$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$的收敛区间是__________.

【答案】$\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$

4. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}(x-1)^n$的收敛区间为__________.

【答案】$\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$

5. 设$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{\sin(xt)}}{t}dt\ (x>0)$，则$F'(x)$=__________.

【答案】$\frac{1}{x}(3e^{\sin x^3}-2e^{\sin x^2})$

6. 设n是自然数，则$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx$=__________.

【答案】$n!$

7. 叙述$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$的分析定义：__________.

【答案】$\forall M>0$，$\exists A>0$，当$x<-A$时，有$f(x)>M$

8. 函数$f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$在零点的幂级数展开式为__________.

【答案】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n2^{n+1}]x^n$

9. 设曲面S由方程$e^z=x^2+yz$给出，则在点$P(1,2,0)$曲面S的切平面方程为__________.

【答案】$2x+z-2=0$

10. 求$I=\int_{-2}^{2}x^2\left(\frac{\sin^3x}{1+x^6}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$=__________.

【答案】$I=2\int_0^2x^2\sqrt{4-x^2}dx\overset{x=2\sin t}{=}32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2tdt=2\pi$

【解析】因为函数$x^2\frac{\sin^3x}{1+x^6}$在$[-2,2]$上为奇函数，$x^2\sqrt{4-x^2}$为偶函数，所以上述积分为

$$I=2\int_0^2x^2\sqrt{4-x^2}dx\overset{x=2\sin t}{=}32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2tdt=2\pi$$

11．设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{e^x-b}{x-1}, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ 在 $x=1$ 点是连续的，则 a=__________，b=__________.

【答案】0、e

12．设曲线 C 为 $x^2+y^2+z^2=6$ 与 $z=x^4+y^2$ 的交线，则在曲线 C 上点 $(1,1,2)$ 的切线与法平面方程分别为__________与__________.

【答案】$\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-2}{2}$、$3x-9y+2z+2=0$

13．极限 $\lim\limits_{x\to +0} x^{x^x-1}$=__________.

【答案】1

14．若 $f(x)=x+1$，$x\in[0,\pi]$，将 f（x）展开为余弦级数，当 $n\geqslant 1$ 时，a_n=__________.

【答案】n 为偶数时，$a_n=0$，n 为奇数时，$a_n=-\dfrac{4}{n^2\pi}$

15．求 $f(x)=2\tan x-\tan^2 x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值__________与最小值__________.

【答案】1、$-2\sqrt{3}-3$

【解析】首先令 $f'(x)=2\sec^2 x-2\tan x\sec^2 x=2\sec^2 x(1-\tan x)=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 为极值点. 当，$x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，

$f'(x)>0$；当 $x>\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值是 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. 而 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}-3$，

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$. 再根据 $f(x)$ 的单调性知最大值是 1，最小值是 $-2\sqrt{3}-3$.

16．设 $f(u)$ 与 $\varphi(t)$ 均可微，$F(t)=f(\varphi(t))$，则__________是不正确的.

【答案】$dF=df\cdot d\varphi$

17．设 $z=y^{xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$=__________.

【答案】$xy^{xy}(\ln y+1)$

18．设曲线 C 是 $(x-1)^2+y^2=1$ 的上半圆周，且以 $A(2,0)$ 为起点，以 $B(0,0)$ 点为终点，则 $\int_C 3x^2(y+1)dx+x^3dy$=__________.

【答案】8

19．积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2(x+1)}$=__________.

【答案】$1-\ln 2$

20．积分 $\int x\cos x dx$=__________.

【答案】$x\sin x+\cos x+C$

21．设 $p\neq -1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$=__________.

【答案】$\dfrac{1}{p+1}$

22．下列函数中不能展开成幂级数的是__________.

【答案】$\int_0^x \cos t^2 dt$

23．设$f'(x^3+1)=1+3x^6$且$f(0)=-1$，则 f（x）=__________.

【答案】$x+(x-1)^3$

24．已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=1$，则 a=__________, b=__________,

【答案】a=-3、b=2

25．若$z=x^2+e^y$，且$y=y(x)$由方程$ye^x+\cos y-1$确定的隐函数，则$\dfrac{dz}{dx}$=__________.

【答案】$2x+\dfrac{ye^{xy}}{e^x-\sin y}$

26．设 L 为$\mathbb{R}^2$中的定向的光滑曲线$\gamma(t)$，$t\in[0,\tau]$，t 增加的方向与 L 的定向一致，$(\cos\alpha,\cos\beta)$是 L 与定向一致的单位切向量，下列式子中正确的是__________.

【答案】$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$

《数学分析》考研核心题库之计算题精编

1. 求和 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n(n^2-1)}$.

【答案】该级数为Leibniz 型的，从而收敛，现考虑函数 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n-1)(n+1)}$，其定义域为 $[-1,1]$.在 $(-1,1)$内，有

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n-1)(n+1)}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}\xlongequal{\text{def}}xf(x)$$

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},$$

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x).$$

从而得到

$$S'(x)=xf(x)=-x\ln(1-x).$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x t\ln(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1-x)-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{1}{4}.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$$

$$=-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=-2S\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right]\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\left(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right).$$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 x=0 处有任意阶导数 $f^{(n)}(0)=0$，求 $g'(x)$，其中

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

【答案】由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$ 可得

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}}{x}=0,$$

对任意 $x\neq0$，有 $g'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\frac{1}{x}$.

2024年中国矿业大学（徐州）643数学分析考研题库[仿真+强化+冲刺]

中国矿业大学（徐州）643数学分析考研仿真五套模拟题

2024年数学分析五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、证明题

1. **证明下列命题.**

（1）设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，满足$0\leqslant f(x)\leqslant x$，$x\in[0,+\infty)$，设$a_1\geqslant 0$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n=1,2,\cdots$.

证明：①$\{a_n\}$为收敛数列；②设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有$f(t)=t$；③若条件改为$0\leqslant f(x)<x$，$x\in(0,+\infty)$,则t=0.

（2）设$f(x)$在$[0,a]$上有二阶连续导数. $f'(0)=1,f''(0)\neq 0$，$0\leqslant f(x)<x$，$x\in(0,a)$. 设$x_1\in(0,a)$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：①$\{x_n\}$为收敛数列并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；②$\{nx_n\}$是否收敛？若不收敛，则说明理由. 若收敛. 则求极限.

【答案】①因$0\leqslant f(x)\leqslant x$，$x\in[0,+\infty)$, 故$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n\leqslant 0$，$n=1,2,\cdots$. 这表明$\{a_n\}$为单调递减数列. 又因$a_1\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$，$a_{n+1}=f(a_n)$. 所以$a_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$. 从而数列$\{a_n\}$单调递减有下界，故$\{a_n\}$为收敛数列.

②因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$t\in[0,+\infty)$，故

$$t=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=f(t).$$

③由$a_n\geqslant 0$及$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$知$t\geqslant 0$. 若$t\neq 0$，则$t>0$且$f(t)<t$，这与$f(t)=t$矛盾. 所以 t=0.

（2）由（1）知$\{x_n\}$为收敛数列. 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 下证：$\{nx_n\}$收敛.

由$0\leqslant f(x)<x$得$f(0)=0$. 由泰勒公式$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$. 由 stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right)}{x-\left(x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right)}{-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2}=-\frac{2}{f''(0)}.$$

故$\{nx_n\}$为收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=-\frac{2}{f''(0)}$.

2. **设二元函数 f（x, y）的两个混合偏导数$f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$在（0,0）点附近存在，且$f_{xy}(x,y)$在（0,0）点连续. 证明：$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.**

【答案】记$I=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0+\Delta y)-f(0+\Delta x,0)+f(0,0)$,

$$\varphi(x)=f(x,0+\Delta y)-f(x,0),\phi(y)=f(0+\Delta x,y)-f(0,y),$$

则$I=\varphi(0+\Delta x)-\varphi(0)$和$I=\phi(0+\Delta y)-\phi(0)$.

一方面，

$$\begin{aligned}I&=\varphi'(0+\theta_1\Delta x)\Delta x\\&=[f_x(0+\theta_1\Delta x,0+\Delta y)-f_x(0+\theta_1\Delta x,0)]\Delta x\\&=f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y\quad(0<\theta_1,\theta_2<1)\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}I&=\phi'(0+\theta_3\Delta y)\Delta y\\&=[f_y(0,\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)]\Delta y\quad(0<\theta_3<1)\end{aligned}$$

由上面两式，有

$$\frac{f_y(0+\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)}{\Delta x}=f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)$$

由$f_{xy}(x,y)$在（0,0）点的连续性，可知

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)=f_{xy}(0,0)$$

于是，有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f_y(0+\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)}{\Delta x}=f_{xy}(0,0)$$

特别地，当$(\Delta x,\Delta y)$沿着直线$\Delta y=0$趋向于（0,0）时，有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=f_{yx}(0,0)=f_{xy}(0,0)$$

3. 设函数 f（x），g（x）均为定义在[a，b]上的有界函数. 证明：若仅在[a，b]中有限个点处$f(x)\neq g(x)$，则当函数 f（x）在[a，b]上可积时，g（x）在[a，b]上也可积，并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

【答案】不妨假设 F（x）=g（x）−f（x），则 F（x）仅在[a，b]中有限个点处不为零，从而 F（x）在[a，b]上可积，且对[a，b]作任意划分P：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$使得$F(\xi_i)=0$，则

$$\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i=0$$

F（x）在[a，b]上可积，从而

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i=0$$

对任意划分 P 和每个$\xi'_i\in[x_{i-1},x_i]$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n g(\xi'_i)\Delta x_i&=\sum_{i=1}^n(g(\xi'_i)-f(\xi'_i))\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f(\xi'_i)\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^n F(\xi'_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f(\xi'_i)\Delta x_i\end{aligned}$$

F（x），f（x）在[a，b]上可积，令$\lambda\to0$（其中$\lambda=\max_i\{\Delta x_i\}$）取极限得到 g（x）在[a，b]上也可积，并且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

4. **设 A 为三阶实对称方阵，定义函数**

$$h(x,y,z)=(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

证明：h（x. y. z）在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

【答案】应用 Lagrange 乘数法，令

$$L(x,y,z,\lambda)=h(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

对 L 求一阶偏导数，并令它们都等于 0，则有

$$\begin{cases}\nabla_{(x,y,z)}L=2A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+2\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

由此方程组知解 $-\lambda$ 为 A 的特征值，（x，y，z）为相应的特征向量，此时 $h(x,y,z)=-\lambda$. 又叫最大值只能在这些解中取到，故 h（x，y，z）在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

5. **设 $f(x)$ 在[a，b]上有定义，且 $f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$. 在以下两种情况下，证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\xi$.**

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加但未必连续.

【答案】（1）设 $F(x)=f(x)-x$，则 $f(x)$ 在[a，b]上连续，且 $F(a)=f(a)-a\geqslant 0$，$F(b)=f(b)-b\leqslant 0$.

若 $F(a)=0$，则 f（a）=a，即 a 为 $f(x)$ 的不动点. 若 $F(b)=0$，则 f（b）=b，即 b 为 $f(x)$ 的不动点.

若 F(a)＞0，F(b)＜0，则由根的存在性定理，在(a，b)的内至少有一个点 x_0，使 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$，亦即 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

综上所述，$f(x)$ 在[a，b]内至少有一个不动点.

（2）设 $f(x)$ 在[a，b]上单调增加. 作曲线 $y=x$，易知 $A(a,f(a))$ 在 $y=x$ 上方，$B(b,f(b))$ 在 $y=x$ 的下方.

取[a，b]的中点 $c_1=\dfrac{a+b}{2}$，若点 $C(c_1,f(c_1))$ 在直线 y=x 上即证. 否则点 C 或在直线上方或在直线下方. 总之，存在 $[a_1,b_1]$ 使 $A(a_1,f(a_1))$ 在 $y=x$ 上方，$B(b_1,f(b_1))$ 在 y=x 的下方.

这样继续下去，存在区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，满足：

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

$$a_n<f(a_n),f(b_n)<b_n.b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0\ (n\to+\infty).$$

由区间套定理，$\exists\xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

由 $f(x)$ 单调不减，对 $\forall n$ 有 $a_n\leqslant b_n$，且 $a_n<f(a_n)\leqslant f(\xi)\leqslant f(b_n)<b_n$. 让 $n\to\infty$ 得 $\xi\leqslant f(\xi)\leqslant\xi$. 于是 $f(\xi)=\xi$.

6. **证明下列结论.**

（1）设函数 u=f（z），其中 z 由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 确定，f,φ 为可微函数. 证明：$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

（2）设函数 u=u（x，y）由方程 $u=y+x\varphi(u)$ 确定，证明 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$.

（3）设函数 u=f（z），z 由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 确定，$f(z)$，$\varphi(z)$ 任意阶可微. 试证明：

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

【答案】（1）对方程 $z=x+y\varphi(z)$ 两边求微分得

$$dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$$

于是

$$z_x=\frac{1}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'}=\varphi z_x.$$

所以

$$u_x=f'(z)z_x=f'(z)\frac{-1}{1-y\varphi'},u_y=f'(z)z_y=f'(z)\frac{\varphi}{1-y\varphi'},$$

故 $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$

（2）由 $u_x=\varphi+x\varphi' u_x$ 有 $u_x=\frac{\varphi}{1-x\varphi'}$ 由 $u_y=1+x\varphi' u_y$ 有 $u_y=\frac{1}{1-x\varphi'}$ *所以

$$u_{xx}=\frac{\varphi' u_x(1-x\varphi')-\varphi(-\varphi'-x\varphi'' u_x)}{(1-x\varphi')^2}=\frac{1}{(1-x\varphi')^2}\left(2\varphi\varphi'+\frac{x\varphi^2\varphi''}{1-x\varphi'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi^2(u)u_y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi^2}{1-x\varphi'}\right)=\frac{2\varphi\varphi' u_y(1-x\varphi')-\varphi^2(-x\varphi'' u_y)}{(1-x\varphi')^2}=\frac{1}{(1-x\varphi')^2}\left(2\varphi\varphi'+\frac{x\varphi^2\varphi''}{1-x\varphi'}\right)$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

（3）对方程 $z=x+y\varphi(z)$ 求微分得

$$dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$$

于是

$$z_x=\frac{1}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'}=\varphi z_x.$$

所以

$$u_x=f'(z)z_x=f'(z)\frac{1}{1-y\varphi'},u_y=f'(z)z_y=f'(z)\frac{\varphi}{1-y\varphi'}.$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$.

假设 n=k−1 时成立 $\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}=\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}\left(\varphi^{k-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. 下证：当 n=k 时，$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 成立.

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}\left(\varphi^{k-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}\partial y}\left(\varphi^{k-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$