全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年中国矿业大学

（徐州）644量子力学考研精品资料

策划：辅导资料编写组

真题汇编 直击考点

考研笔记 突破难点

核心题库 强化训练

模拟试题 查漏补缺

高分学长学姐推荐

【初试】2024年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清PDF电子版支持打印，考研首选资料。

一、中国矿业大学（徐州）644量子力学考研真题汇编及考研大纲

1. **中国矿业大学（徐州）644量子力学2006-2010年考研真题，暂无答案。**

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

2. **中国矿业大学（徐州）644量子力学考研大纲**

①2022年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研大纲。

②2023年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研大纲。

说明：考研大纲给出了考试范围及考试内容，是考研出题的重要依据，同时也是分清重难点进行针对性复习的首选资料，本项为免费提供。

二、2024年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研资料

3. 《量子力学简明教程》考研相关资料

（1）《量子力学简明教程》[笔记+提纲]

①中国矿业大学（徐州）644量子力学之《量子力学简明教程》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（徐州）644量子力学之《量子力学简明教程》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

4. 《量子力学教程》考研相关资料

（1）《量子力学教程》[笔记+提纲]

①中国矿业大学（徐州）644量子力学之《量子力学教程》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（徐州）644量子力学之《量子力学教程》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

5. 《量子力学》考研相关资料

（1）《量子力学》[笔记+提纲]

①中国矿业大学（徐州）644量子力学之《量子力学》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（徐州）644量子力学之《量子力学》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

6. 中国矿业大学（徐州）644量子力学之量子力学教程考研c（含答案）

①中国矿业大学（徐州）644量子力学考研核心题库之量子力学教程应用计算题精编。

②中国矿业大学（徐州）644量子力学考研核心题库之量子力学教程简单证明题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类

汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习首选资料。

7．**中国矿业大学（徐州）644 量子力学之量子力学教程考研模拟题[仿真+强化+冲刺]**

①2024 年中国矿业大学（徐州）644 量子力学之量子力学教程考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024 年中国矿业大学（徐州）644 量子力学之量子力学教程考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习首选。

③2024 年中国矿业大学（徐州）644 量子力学之量子力学教程考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺首选资料。

三、电子版资料全国统一零售价

8．**本套考研资料包含以上一、二部分（高清 PDF 电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]**

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024 年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

9．**中国矿业大学（徐州）644 量子力学考研初试参考书**

《量子力学教程》，曾谨言著，科学出版社，2014 年；

《量子力学》，汪德新编著，科学出版社，2008 年；

《量子力学简明教程》，周世勋著，高等教育出版社，2009 年；

五、本套考研资料适用学院和专业及考试题型

材料与物理学院：物理学

选择判断题、简单证明题和应用计算题

目录

2024年中国矿业大学（徐州）644量子力学备考信息

中国矿业大学（徐州）644量子力学考研初试参考书目

《量子力学教程》，曾谨言著，科学出版社，2014年；
《量子力学》，汪德新编著，科学出版社，2008年；
《量子力学简明教程》，周世勋著，高等教育出版社，2009年；

中国矿业大学（徐州）644量子力学考研招生适用院系及考试题型

材料与物理学院：物理学

选择判断题、简单证明题和应用计算题

中国矿业大学（徐州）644 量子力学历年真题汇编

中国矿业大学（徐州）644 量子力学 2006 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 458　　　科目名称： 量子力学

一、填空题（共 32 分，每小题 4 分）

1、 Davission-Germer 实验主要表现出电子具有_________；

Compton 散射实验表明光子的动量为_________；且说明光子与物质相互作用时满足_________守恒和_________守恒。

2、体系的哈密顿量为 $\hat{H}$，若力学量 $\hat{F}$ 是体系的守恒量，则 $[\hat{F},\hat{H}]=$_______。

3、已知粒子坐标为 $\vec{r}$，动量为 $\vec{p}$，则 $(\vec{r}\cdot\vec{p})=$______（是或不是）厄密算符。

4、设在球坐标系中粒子波函数为 $\Psi(r,\theta,\varphi)$，则

在球壳 $(r\sim r+dr)$ 中找到粒子的概率______________________________；

在 (θ,φ) 方向的立体角 $d\Omega$ 中找到粒子的概率_______________________。

5、已知两个角动量 $j_1=1, j_2=1$，则其耦合的总角动量 J 可取______________。

6、反常塞曼效应是指____。

7、微分散射截面 $q(\theta,\varphi)$ 的物理意义是________________________________。

8、____称为全同性原理。

二、计算或证明下列算符间的对易关系（共 38 分）

1、计算 $[x,\hat{p}f(x)\hat{p}]$， $\hat{p}$ 是动量算符 x 分量， $f(x)$ 是坐标 x 的函数。 （10 分）

2、计算 $[\hat{\vec{p}},\hat{r}]$，其中 $\hat{\vec{p}}$ 是动量算符，$\hat{r}$ 为径向坐标。 （8 分）

3、计算 $[\hat{l}_x,e^{\alpha\hat{p}_z}]$，其中 $\hat{l}_x$、 $\hat{p}_z$ 是角动量和动量算符 z 分量， α 为常数。（10 分）

4、设算符 $\hat{F},\hat{G}$ 与它们的对易式 $[\hat{F},\hat{G}]$ 都对易，则

$$[\hat{F},\hat{G}^n]=n\hat{G}^{n-1}[\hat{F},\hat{G}]$$ （10 分）

中国矿业大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

三、计算题（共 80 分）

1、质量为 m 的粒子在宽度为 a 的一维无限深非对称势阱中运动，设在 $t=0$ 时粒子的状态为 $\psi(0)=c_1\psi_1+c_2\psi_2+c_3\psi_3+c_4\psi_4$， $\psi_n(n=1,2,3,4)$ 是能量为 E_n 时一维无限深非对称势阱的归一化本征函数，c_1,c_2,c_3,c_4 是已知常数，求：

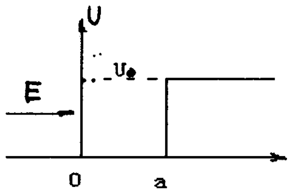
（1）在时刻 $t=0$ 时，测量能量，结果小于 $3\pi^2\hbar^2/ma^2$ 的概率。

（2）在时刻 $t=0$ 时，能量 E 的平均值。

（3）时刻为 t 时的波函数 $\psi(t)$。

（4）如果在 ψ 态下测量能量，所得结果为 $8\pi^2\hbar^2/ma^2$，问测量后粒子所处在何种状态？ （20 分）

2、质量为 m，能量为 E 的粒子从左向右射向势垒 $U(x)=\begin{cases}U_0 & (x\geq a)\\ 0 & (x\langle a)\end{cases}$ （如图），



计算 $E\langle U_0$ 情况下的反射系数 R。 （20 分）

3、设体系的哈密顿算符的矩阵形式为

$$H=\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ c & 3 & 0\\ 0 & 0 & c-2\end{pmatrix}$$

（1） 求 H 的精确本征值。

（2） 设 $c\ll 1$，用微扰论方法求 H 的本征值到二级近似及波函数到一级近似。 （20 分）

4、设体系处在 $Y_{1-1}(\theta,\varphi)$ 态，$\hat{\vec{L}}$ 为角动量算符,求算符 $\hat{L}_z\hat{L}_x^2$ 的平均值 $\langle\hat{L}_z\hat{L}_x^2\rangle$。（20 分）

中国矿业大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 458　　　科目名称： 量子力学

（本试卷共六大题，每一大题 25 分，共计 150 分）

一、计算、证明下面算符的对易关系

1. 求$[\hat{z}, e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{p}_z}]$，式中$\alpha$为常量，$\hat{z}, \hat{p}_z$分别为坐标和动量算符的 z 分量。

2. 证明$[\hat{\vec{l}}^2, \hat{p}_x] = i\hbar(\hat{\vec{p}}\times\hat{\vec{l}} - \hat{\vec{l}}\times\hat{\vec{p}})_x$ 式中$\hat{\vec{l}}^2, \hat{\vec{p}}$别为轨道角动量平方和动量算符。

（25 分）

二、质量为 m 的无自旋粒子在势阱

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \qquad (U_0 \text{ 是常数})$$

中运动，求其角动量$l = 0$时的束缚能级所满足的方程。（25 分）

三、设 t=0 时氢原子处在状态

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}[c\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1}]$$

（1） 常数$c = ?$；

（2） 求此体系能量的平均值；

（3） 求体系处于$l = 1, m = 1$态的几率；

（4） 求任意 t 时刻的波函数。

（式中ψ_{lmn}为氢原子的能量本征函数）（25 分）

四、一维线性谐振子体系的哈密顿

$$\hat{H} = (\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

其中：$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p})$，$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p})$。对于定态$|n\rangle$，求坐标平方的平均值$\langle x^2 \rangle$和动量平方的平均值$\langle p^2 \rangle$。（25 分）

试题必须随答卷一起交回，所有答题必须写在专用答题纸上，写在本试题纸上无效！

中国矿业大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 458　　　　科目名称: 量子力学

五、一个质量为 m 的粒子在二维无限深势阱

$$U=\begin{cases}0 & (0\le (x,y)\le a)\\ \infty & (x,y\text{取其它值})\end{cases}$$

中运动。设加上微扰 $H'=\lambda xy$ $(0\le (x,y)\le a)$，求基态和第一激发态的能量一级近似。(25 分)

六、两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子组成的系统由哈密顿

$$H=a(\hat{s}_{1z}+\hat{s}_{2z})+b\hat{s}_1\cdot\hat{s}_2$$

描述。其中 $\hat{\vec{s}}_1,\hat{\vec{s}}_2$ 分别是这两个粒子的自旋，而 $\hat{s}_{1z},\hat{s}_{2z}$ 分别是这两个粒子自旋的 z 分量，a,b 是实常数。求该体系的所有能级。(25 分)

中国矿业大学（徐州）644 量子力学考研大纲

2022 年中国矿业大学（徐州）644 量子力学考研大纲

858 量子力学

《量子力学教程》，曾谨言著，科学出版社，2014 年；
《量子力学》，汪德新编著，科学出版社，2008 年；
《量子力学简明教程》，周世勋著，高等教育出版社，2009 年；

一、考试目的与要求

考试目的：考查学生是否掌握《量子力学》的基本概念、基本理论、基本方法以及相关的分析、解决问题的能力。

基本要求：

1.理解波函数的统计意义，掌握薛定谔方程及其简单应用。
2.掌握力学量算符及其本征值问题。
3.掌握微扰理论和变分方法。
4.理解弹性散射的物理过程，了解分波法，掌握波恩近似公式。
5.掌握自旋及全同粒子概念、角动量及其耦合方法。

二、考试范围

1.薛定谔方程及其简单应用；
2.力学量（坐标、动量、角动量、能量等）算符性质及其本征值问题；
3.中心力场（氢原子）问题；
4.带电粒子在电磁场中运动问题；
5.定态微扰论和变分法问题；
6.非全同粒子弹性散射问题。

三、试题结构

1.考试时间：3 小时
2.试题类型：选择判断题、简单证明题和应用计算题共计 150 分。　不允许使用计算器

2023 年中国矿业大学（徐州）644 量子力学考研大纲

644	**量子力学**	《量子力学教程》,曾谨言著，科学出版社，2014 年； 《量子力学》，汪德新编著，科学出版社，2008 年； 《量子力学简明教程》，周世勋著，高等教育出版社，2009 年；	**一、考试目的与要求** **考试目的：**考查学生是否掌握《量子力学》的基本概念、基本理论、基本方法以及相关的分析、解决问题的能力。 **基本要求：** 1. 理解波函数的统计意义，掌握薛定谔方程及其简单应用。 2. 掌握力学量算符及其本征值问题。 3. 掌握微扰理论和变分方法。 4. 理解弹性散射的物理过程，了解分波法，掌握波恩近似公式。 5. 掌握自旋及全同粒子概念、角动量及其耦合方法。 **二、考试范围** 1. 薛定谔方程及其简单应用； 2. 力学量（坐标、动量、角动量、能量等）算符性质及其本征值问题； 3. 中心力场（氢原子）问题； 4. 带电粒子在电磁场中运动问题； 5. 定态微扰论和变分法问题； 6. 非全同粒子弹性散射问题。 **三、试题结构** 1. 考试时间：3 小时 2. 试题类型：选择判断题、简单证明题和应用计算题共计 150 分。

2024年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研核心笔记

《量子力学教程》考研核心笔记

第1章　波函数与Schrodinger方程

考研提纲及考试要求

考点：波动一粒子两重性矛盾的分析
考点：实物粒子的波动性几率波
考点：力学量的平均值与算符的引进
考点：Schrodinger方程的引入和讨论
考点：能量本征方程
考点：多粒子体系的Schrodinger方程
考点：量子态及表象
考点：态叠加原理

考研核心笔记

【核心笔记】波函数的统计诠释

1.波动一粒子两重性矛盾的分析

（1）粒子由波组成

人们曾经将电子波理解为电子的某种实际结构，即看成三维空间中连续分布的某种物质波包，因而呈现出干涉与衍射等现象。波包的大小即电子的大小，波包的群速度即电子的运动速度。

自由电子

$$E=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=h\nu\Rightarrow\nu=\frac{\hbar^2k^2}{2mh}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\lambda=\frac{h}{p}\Rightarrow p=\hbar k$$

角频率

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{\hbar^2k^2}{2mh}=\frac{\hbar k^2}{2m}$$

（2）波由粒子组成

降低电流密度，电子一个一个的通过小孔，但只要时间足够长，底片上增加呈现出衍射花纹。这说明电子的波动性并不是许多电子在空间聚集在一起时才有的现象，单个电子就具有波动性。

2.实物粒子的波动性几率波

（1）经典概念中粒子意味着

①有一定质量、电荷等“颗粒性”的属性;

②根据经验，有确定的运动轨道，每一时刻有一定位置和速度。

（2）经典概念中波意味着

①实在的物理量的空间分布作周期性的变化;

②干涉、衍射现象，即相干叠加性。

（3）电子双缝衍射

①入射电子流强度小，开始显示电子的微粒性，长时间亦显示衍射图样;

②入射电子流强度大，很快显示衍射图样.

（4）1926 年,玻恩(M.Born)首先提出了波函数的统计解释：

波函数在空间中某一点的强度（波函数模的平方）与粒子在该点出现的概率成比例。

根据波函数的统计诠释，很自然要求该粒子（不产生，不湮灭）在空间各点的几率之总和为 1，即要求波函数满足下列要求：

$$\int_{(\text{全})}|\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = 1 \qquad (d^3r = dxdydz)$$

（5）相对几率分布:

令

$$\psi(\vec{r},t) = C\phi(\vec{r},t)$$

$$\left|\frac{C\phi(\vec{r}_1,t)}{C\phi(\vec{r}_2,t)}\right|^2 = \left|\frac{\psi(\vec{r}_1,t)}{\psi(\vec{r}_2,t)}\right|^2$$

$\psi(\vec{r},t)$和$C\phi(\vec{r},t)$所描写状态的相对几率是相同的，这里的C是常数。

非相对论量子力学仅研究低能粒子，实物粒子不会产生与湮灭。这样，对一个粒子而言，它在全空间出现的几率等于一，所以粒子在空间各点出现的几率只取决于波函数在空间各点强度的相对比例，而不取决于强度的绝对大小，因而，将波函数乘上一个常数后，所描写的粒子状态不变，即$\psi(\vec{r},t)$和$C\psi(\vec{r},t)$描述同一状态

3.动量分布几率

按照波函数$\psi(r)$的统计诠释，在空间 r 点处找到粒子的几率$\propto|\psi(r)|^2$。

4.测不准关系

Heisenberg 的测不准关系对此做了最集中和最形象的概括。于 1927 年根据一些理想实验的分析以及 deBroglie 关系而得出。

$$p = h/\lambda$$

从宏观角度来看，由于 h 是一个很小的量，测不准关系和日常的生活并无什么矛盾。

5.力学量的平均值与算符的引进

粒子处在波函数$\psi(r)$所描述的状态下，虽然不是所有力学量都有确定的值，但他们都有确定的几率分布，因而有确定的平均值，如位置 x 的平均值为:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(r)|^2 x d^3r$$

势能 V（r）的平均值为

$$\bar{V} = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(r)|^2 V(r) d^3r$$

给定波函数$\psi(r)$之后，测得粒子动量在（p，p＋dp）中的几率为$|\varphi(p)|^2 d^3 p$，其中

$$\varphi(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(r)e^{-ip\cdot r/\hbar}d^3 r$$

因此，可以借助于$\varphi(p)$来间接计算动量的平均值

$$\bar{p}=\int_{-\infty}^{\infty}d^3 p|\varphi(p)|^2 p=\int_{-\infty}^{\infty}d^3 p\varphi^*(p)p\varphi(p)$$

$$=\iint_{-\infty} d^3 pd^3 r\psi^*(r)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{ip\cdot r/\hbar}p\varphi(p)$$

$$=\iint_{-\infty} d^3 rd^3 p\psi^*(r)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}(-i\hbar\nabla)e^{ip\cdot r/\hbar}\varphi(p)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3 r\psi^*(r)(-i\hbar\nabla)\psi(r)$$

6.统计诠释对波函数提出的要求

（1）要求$|\psi(r)|^2$取有限值，但并不排除空间某些孤立奇点。

（2）满足归一化条件，但并不排除使用某些不能归一的理想波函数。

（3）要求$|\psi(r)|^2$单值。

（4）波函数及其各阶微商的连续性。

【核心笔记】Schrodinger 方程

微观粒子量子状态用波函数完全描述，波函数确定之后，粒子的任何一个力学量的平均值及其测量的可能值和相应的几率分布也都被完全确定，波函数完全描写微观粒子的状态。因此量子力学最核心的问题就是要解决以下两个问题：

(1)在各种情况下，找出描述系统的各种可能的波函数；

(2)波函数如何随时间演化。

1.Schrodinger 方程的引入

$$E=\frac{p^2}{2m}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\omega=E/\hbar,k=p/\hbar$$

描写自由粒子波函数：

$$\Psi=A\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\bullet\vec{r}-Et)\right]$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}E\Psi \quad\rightarrow\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=E\Psi$$

$$-i\hbar\nabla\psi = p\psi, \quad -\hbar^2\nabla^2\psi = p^2\psi$$

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2)\psi = (E^2-\frac{p^2}{2m})\psi = 0$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t)$$

2.Schrodinger 方程的讨论

（1）定域几率守恒

粒子在 t 时刻 r 点周围单位体积内粒子出现的几率即几率密度是：

$$\rho(r,t) = \Psi^*(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2$$

对一个粒子而言，在全空间找到它的几率总和应不随时间改变，即

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(r,t)|^2 d^3r = 0$$

（2）初值问题传播子

由于 Schrodinger 方程只含波函数 $\psi(r,t)$ 对时间的一次微商，只要在初始时刻（t＝0）体系的状态 $\psi(r,0)$ 给定,则以后任何时刻 t 的状态 $\psi(r,t)$ 原则上就完全确定了。换言之，Schrodinger 方程给出了波函数（量子态）随时间演化的因果关系。

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\varphi(p)e^{i(p\cdot r-Et)/\hbar}d^3p$$

$$E = p^2/2m$$

$$\psi(r,0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\varphi(p)e^{ip\cdot r/\hbar}d^3p$$

$$\varphi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\psi(r,0)e^{-ip\cdot r/\hbar}d^3r$$

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3r'\int d^3p e^{ip(r-r')/\hbar-Et/\hbar}\psi(r',0)$$

$$E = p^2/2m$$

3.能量本征方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t) \quad (1)$$

若 $U(\vec{r})$ 与 t 无关，则可以分离变量，令

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})f(t) \quad (2)$$

(2)代入(1)式，两边同除 $\psi(\vec{r})f(t)$ ，得到

《量子力学简明教程》考研核心笔记

第 1 章　绪论

考研提纲及考试要求

考点：光的本质之争，粒子还是波
考点：光的波动说
考点：光的粒子性实验证据之一——黑体辐射
考点：光的粒子性证据之二光电效应
考点：光的粒子性实验证据之三——康普顿效应
考点：光的波粒二象性
考点：原子结构
考点：实物粒子的波粒二象性

考研核心笔记

【核心笔记】经典物理学的困难

（1）十九世纪末，经典物理学取得巨大成功的同时，人们也发现一些新的现象不能用经典物理学解释。
（2）这些现象包括：黑体辐射、光电效应、原子的光谱线系、固体在低温下的比热
（3）在这些现象的研究中暴露出经典物理的局限性，显示出它与微观世界的矛盾。

【核心笔记】光的波粒二象性

1.光的本质之争，粒子还是波

（1）光的本质之争由来已久
（2）在牛顿之前就有波动说与粒子说之争
（3）牛顿极力主张光的微粒说(1680 年)，几何光学是微粒说的代表。
（4）在牛顿时代，波动说的代表是荷兰物理学家惠更斯。
（5）那时微粒说占主导地位

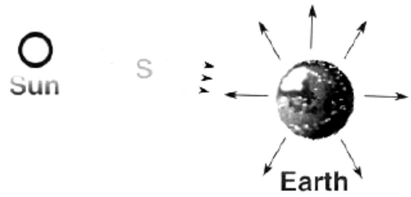
2.光的波动说

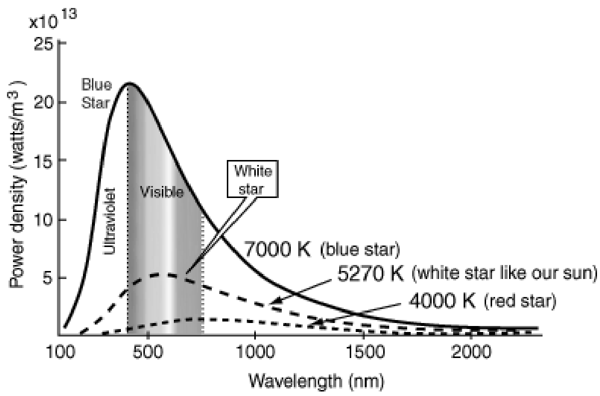
（1）牛顿去世以后，新的实验事实和波的数学工具发展，使波动说逐渐占据上风。
（2）牛顿死后大约一百年，波动说由法国人费涅尔发展到日臻完善的境地。
（3）费涅尔的理论简洁而有力，对当时的棱镜实验，光的衍射实验等许多复杂现象都能给出漂亮的解释。
（4）麦克斯韦方程组不仅总结了法拉弟等人电磁学理论，而且预言电磁波。
（5）在麦克斯韦去世 7 年后，1887 年，赫兹用实验证实了麦克斯韦电磁波的预言。
（5）后来人证实光的本质是电磁波，至此，光的波动说完全战胜了微粒说。

3.光的粒子性实验证据之一——黑体辐射

（1）温度大于绝对零度任何物体每时每刻都在向外辐射电磁辐射
（2）基尔霍夫定律：辐射度 r 与吸收本领 α 的比值与物体的性质无关 $\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}}=f(\lambda,T)$

（3）比值是温度和波长的普适函数





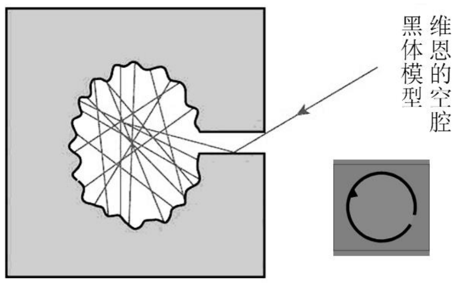
夜幕上星体的辐射度作为波长的函数

（4）为了寻找这个普适函数，人们定义在任何温度下，全部吸收任何波长辐射的物体为绝对黑体，简称黑体。

（5）黑体的吸收本领 $\alpha_{\lambda,T}$ 与波长和温度无关，总等于 1

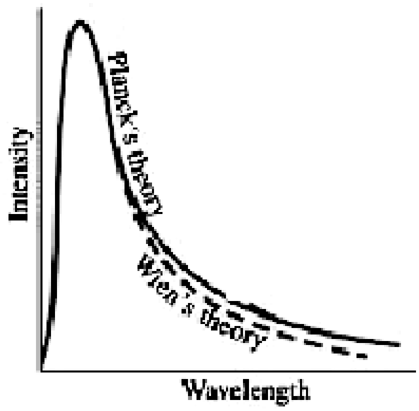
（6）因此，黑体辐射度 $r_{\lambda,T}=f(\lambda,T)$

什么物体是黑体？什么物体最黑？



（7）针对这个模型加上一些假设，利用热力学理论，维恩得到了黑体辐射能量波长分布函数，即有名的维恩公式。

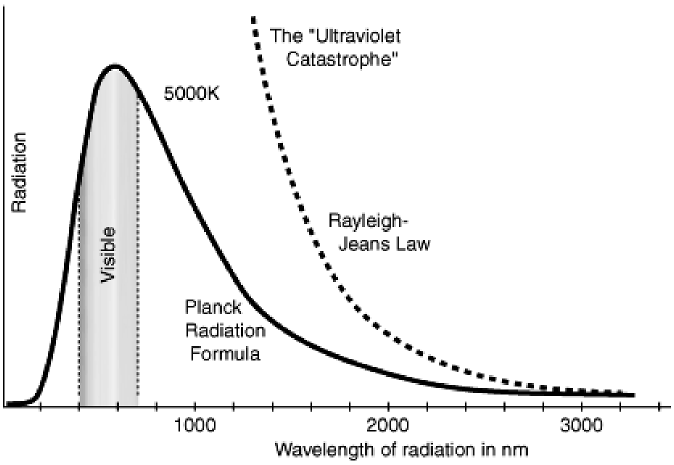
（8）与实验结果相比，短波长部分与实验符合较好，长波长部分与实验相差较大。



(9)随后，英国物理学家 Reyleiph 和 Jeans 用经典电磁场理论和统计物理学推导出黑体辐射的新公式。

$$r_{\lambda,T}d\lambda=\frac{2\pi c}{\lambda^4}kTd\lambda$$ 这个公式只有在波长相当长的部分与实验曲线相符合。

（10）随着波长减小，辐射度无限增大，隐含总发射能量发散。这显然是不正确的
辐射理论出现这种荒唐的局面被称之为“紫外灾难”
（11）实际上它不仅是某一个特殊公式的灾难，也是这个公式全部理论基础——经典物理学的灾难

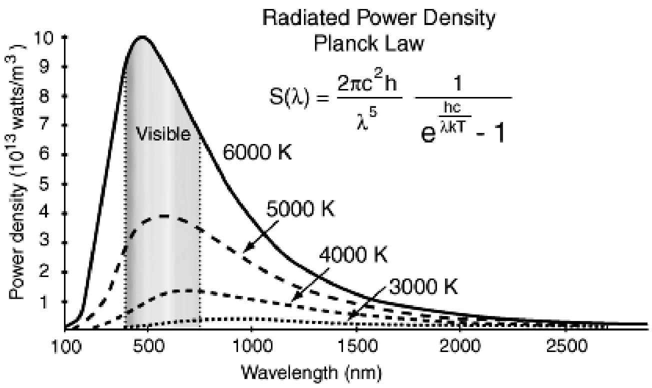


（12）1900 年，在 R-J 公式发表之前，德国物理学家 Planck 偶然得到一个经验公式

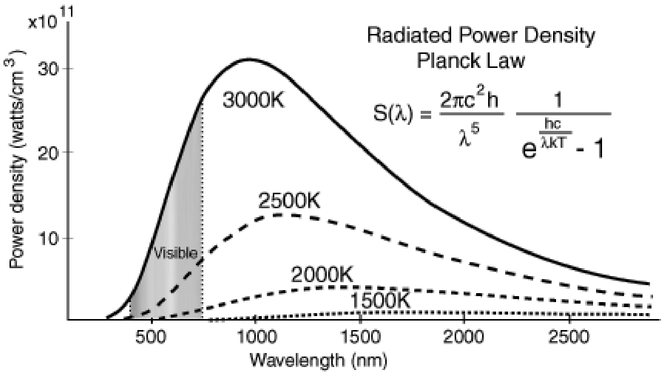
$$r_{\lambda,T}d\lambda=C\lambda^{-5}\frac{d\lambda}{e^{\frac{hv}{kT\lambda}}-1}$$

当 $\lambda\to 0$ 时，Planck 公式趋于 Wien 公式。

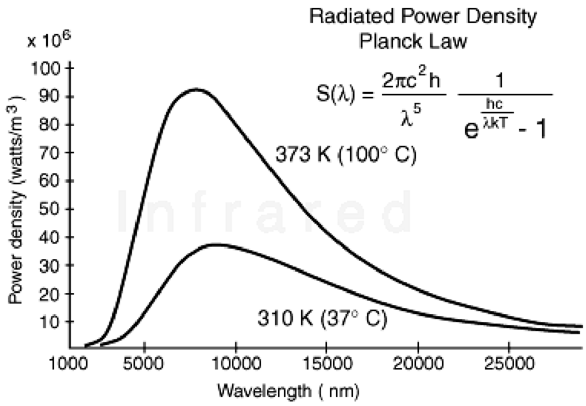
当 $\lambda\to\infty$ 时，Planck 公式趋于 R-J 公式。



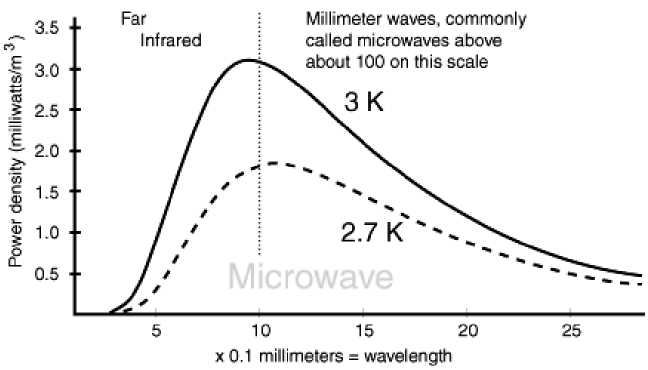
Planck 公式图示(高温)



Planck 公式图示（较高温度）



Planck 公式图示（中温）



Planck 公式图示（低温）

①许多物理学家立即用这个公式与当时最精密的实验数据对比，发现在整个波长范围内与实验符合得

《量子力学》考研核心笔记

第 1 章　绪论

考研提纲及考试要求

考点：斯特藩-玻耳兹曼定律
考点：维恩位移定律
考点：>光电效应
考点：>康普顿散射

考研核心笔记

【核心笔记】黑体辐射定律与普朗克常数

固体或液体，在任何温度下都在发射各种波长的电磁波，这种由于物体中的分子、原子受到激发而发射电磁波的现象称为热辐射。所辐射电磁波的特征仅与温度有关。

黑体:物体对于外来的辐射有反射和吸收作用。如果一个物体能全部吸收投射在它上面的辐射而无反射，这种物体称为黑体。所以，黑体的热辐射本领大于任何其他物体。

不透明的材料制成带小孔的的空腔,可近似看作黑体。

研究黑体辐射的规律是了解一般物体热辐射性质的基础。

1.斯特藩-玻耳兹曼定律

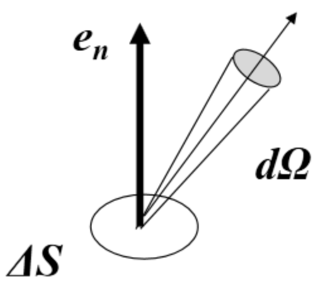
黑体的辐出度（辐射能流通量）与黑体的绝对温度四次方成正比

$$J_u = \sigma T^4$$

斯特藩常数

$$\sigma = 5.6704\times10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\cdot K^4)}$$

热辐射的功率随着温度的升高而迅速增加。



单位时间内经由ΔS 沿 dΩ 方向辐射出的能量

$$\Delta S\cdot\cos\theta\cdot cu\frac{d\Omega}{4\pi}$$

2.维恩位移定律

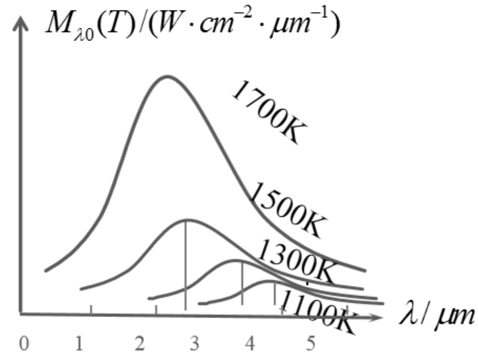
对于给定温度 T，黑体的单色辐出度 $M_{\lambda 0}$ 有一最大值,其对应波长为 λ_m 。

$$T\lambda_m = b$$

维恩常量

$$b = 5.1醋10^{-3}\ \mathrm{m\ K}$$

热辐射的峰值波长随着温度的增加而向着短波方向移动.



绝对黑体的辐出度按波长分布曲线

维恩经验公式

$$M_{l0}(T) = C_1 l^{-5} e^{-C_2/lT}$$

这个公式与实验曲线波长短处符合得很好，但在波长很长处与实验曲线相差较大。

瑞利--金斯经验公式

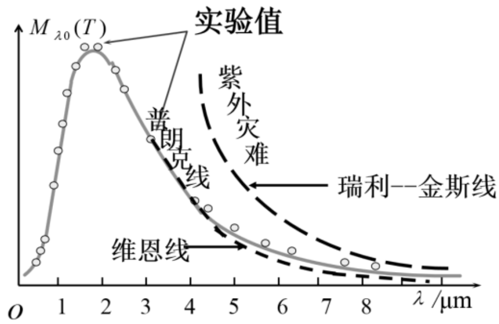
$$M_{\lambda 0}(T) = C_3\lambda^{-4}T$$

这个公式在波长很长处与实验曲线比较相近，但在短波区，按此公式，M 将随波长趋向于零而趋向无穷大的荒谬结果，即“紫外灾难”。

普朗克公式与实验结果符合得很好。

$$M_{\lambda 0}(T) = 2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

$$h = 6.6260755醋10^{-34}\ \mathrm{J\ s}$$



【核心笔记】光子

$$E = mc^2 = h\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

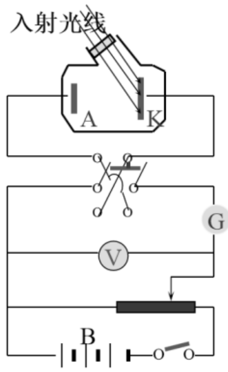
爱因斯坦认为，电磁波的结构是量子化的，其最小单元就是一个光子。每个光子均以相同的速度 c 运动。

引入“波矢”的概念，则光子的动量又可以表示为

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

1.>光电效应

金属板释放的电子称为光电子,光电子在电场作用下在回路中形成光电流。



光电效应实验装置

爱因斯坦光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$$

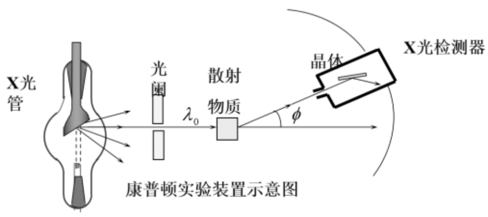
（1）临界频率 v_0

对于一定的金属材料做成的（表面光洁的）电极，当光的频率大于某一定值 v_0 时，才有光电子发射出来。若光频率小于该值时，则不论光强度多大，照射时间多长，都没有电子产生。光的这一频率 v_0 称为临界频率。

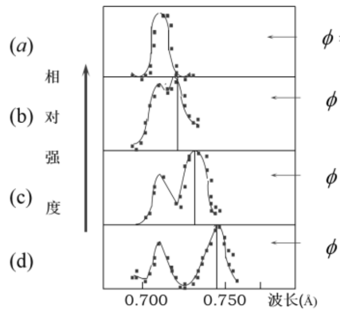
（2）每个电子的能量只是与光的频率有关，而与光强无关，光强度只影响到光电流的强度，即单位时间从金属电极单位面积上逸出的电子数目。光电效应的这些规律是经典理论无法解释的。按照光的电磁理论，光的能量只决定于光的强度而与频率无关。

（3）当入射光频率 $v>v_0$ 时，不管光多微弱，只要光一照上，几乎立即（～10^{-9}s）观测到光电子。这也与经典电磁理论计算的结果很不一致。

2.>康普顿散射



康普顿实验装置示意图



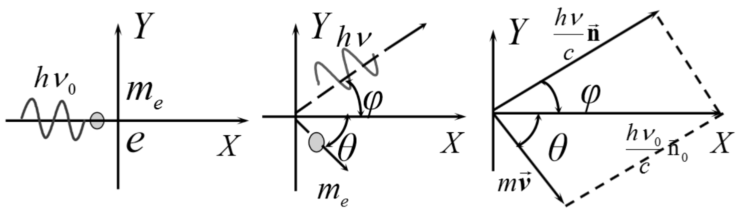
康普顿散射与角度的关系

光子理论认为康普顿效应是光子和自由电子作弹性碰撞的结果，具体解释如下：

若光子和外层电子相碰撞，光子有一部分能量传给电子,散射光子的能量减少，于是散射光的波长大于入射光的波长。

若光子和束缚很紧的内层电子相碰撞，光子将与整个原子交换能量,由于光子质量远小于原子质量，根据碰撞理论，碰撞前后光子能量几乎不变，波长不变。

因为碰撞中交换的能量和碰撞的角度有关，所以波长改变和散射角有关。



由能量守恒:

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$$

由动量守恒:

$$m\vec{v} = \frac{h\nu_0}{c}\vec{e_0} - \frac{h\nu}{c}\vec{e}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\lambda_c\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43\times10^{-12}\,\mathrm{m}$$

电子的康普顿波长。

3.>粒子-反粒子对的湮没与产生

实验发现，电子与正电子相碰撞，可以湮没并产生两个 γ 光子

$$e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$$

相应的 γ 射线波长

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} \le \frac{h}{m_ec} = \lambda_c$$

两光子相碰可能转变成质子-反质子对或中子-反中子对，按照能量守恒有

2024年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研复习提纲

《量子力学教程》考研复习提纲

《量子力学教程》复习提纲

第一部分　量子力学发展简要回顾

【复习内容】

1．经典物理的困难；
2．黑体辐射与 Plank 的量子论；
3．光电效应与 Einstein 的光量子；
4．原子结构与 Bohr 的量子论；
5．德布罗意波。

【复习要求】

1．了解经典物理学的困难。
2．理解光和粒子的波粒二象性。
3．掌握德布罗意假设及其实验验证。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第二部分　波函数与 Schrödinger 方程

【复习内容】

1. 波函数的统计诠释；
2. Schrödinger 方程；
3. 量子态叠加原理。

【复习要求】

1．熟悉：波函数的统计解释；Schrödinger 方程的建立的原则；定态的概念和性质。
2．掌握：态迭加原理，明确它和经典波叠加原理的区别；含时 Schrödinger 方程；运用定态 Schrodinger 方程求解能量本征值问题。
3．了解：波粒二象性，Schrödinger's cat。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第三部分　一维势场中的粒子

【复习内容】

1. 一维势场中粒子能量本征态的一般性质；
2. 方势；
3. δ 势；
4. 一维谐振子。

【复习要求】

1．熟悉：能量本征态的一般性质。
2．掌握：Schrödinger 方程在一维势场中的应用；一维谐振子能量本征方程的解法。

3．了解δ势；反射系数、透射系数物理意义。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第四部分　力学量用算符表达

【复习内容】

1. 算符的运算规则；
2. 厄米算符的本征值与本征函数；
3. 共同本征函数；
4. 连续谱本征函数的“归一化”。

【复习要求】

1．熟悉算符的运算规则；
2．掌握厄米算符的本征值与本征函数，共同本征函数；
3．了解连续谱本征函数的“归一化”；

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第五部分　力学量随时间的演化与对称性

【复习内容】

1. 力学量随时间的演化；
2. 守恒量与对称性的关系；
3. 全同粒子体系与波函数的交换对称性。

【复习要求】

1．熟悉：力学量随时间的演化与对称性；
2．掌握：力学量守恒的条件，守恒量与对称性的关系，Pauli 不相容原理；
3．了解：全同粒子体系与波函数的交换对称性。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第六部分　中心力场

【复习内容】

1. 中心力场中粒子运动的一般性质；
2. 无限深球方势阱；
3. 三维各向同性谐振子；
4. 氢原子。

【复习要求】

1．熟悉：中心力场中粒子运动的一般性质。
2．掌握：氢原子（类氢原子）求解过程。
3．了解：三维各向同性谐振子；

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第七部分　量子力学的矩阵形式与表象变换（双语）

【复习内容】

1.　量子态的不同表象、幺正变换；
2.　力学量（算符）的矩阵表示；
3.　量子力学的矩阵形式；
4.　Dirac 符号。

【复习要求】

1．熟悉：态的表象；算符的矩阵表示；Dirac 符号的应用。
2．掌握：表象变换；力学量和量子力学规律的矩阵表现形式。
3．了解：坐标系和坐标变换；

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第八部分　自　旋

【复习内容】

1.　电子自旋态与自旋算符；
2.　总角动量的本征态；
3.　自旋单态与三重态，自旋纠缠态。

【复习要求】

1．熟悉：角动量的叠加规律。
2．掌握：电子自旋、自旋算符与自旋波函数以及考虑空间运动后体系的总波函数；Pauli 矩阵。
3．了解：自旋纠缠态。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第九部分　力学量本征值问题的代数解法（双语）

【复习内容】

1.　谐振子的 Schrödinger 因式分解法；
2.　角动量的本征值与本征态；
3.　两个角动量的耦合，Clebsch-Gordan 系数。

【复习要求】

1．熟悉：角动量的本征值与本征态。
2．掌握：力学量本征值问题的代数解法。
3．了解：两个角动量的耦合与 Clebsch-Gordan 系数。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

第十部分　微扰论

【复习内容】

1. 束缚态微扰论；
2. 散射态微扰论。

【复习要求】

1．熟悉：能量修正的处理方法。
2．掌握：兼并和非兼并束缚态微扰论。
3．了解：散射态微扰论。

【复习方法】启发式和讨论式，电子课件与黑板讲授相结合

2024年中国矿业大学（徐州）644量子力学考研核心题库

量子力学考研核心题库之应用计算题精编

1. **研究硬球低能散射**

$$V(r)=\begin{cases}0, & r>r_0\\ \infty, & r<r_0\end{cases}$$

产生的S波相移和P波相移，证明δ_1与δ_0相比可以忽略。

【答案】(1)有两种方法计算δ_0：

(i)解对应于l=0的径向方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+k^2\right]u_{k0}=0\qquad(r>r_0)$$

且因$r=r_0$时势为无穷大，故$u_{k0}(r_0)=0$。其解为

$$u_{k0}(r)=\begin{cases}c\sin k(r-r_0), & r>r_0\\ 0, & r<r_0\end{cases}$$

相移按定义由$u_{k0}(r)\overset{r\to\infty}{\sim}\sin(kr+\delta_0)$确定，故知

$$\delta_0=-kr_0$$

(ii)由于对r=0处无特定的边界条件，故$R_{kl}(r)$的一般解可取为

$$R_{kl}=\cos\delta_l j_l(kr)-\sin\delta_l n_l(kr)$$

由$r=r_0$处的边界条件，得到$R_{kl}(r_0)=0$。故知$\tan\delta_l=j_l(kr_0)/n_l(kr_0)$，所以有

$$\delta_0\approx\tan\delta_0=j_0(kr_0)/n_0(kr_0)$$

$$=\frac{\sin(kr_0)/(kr_0)}{-\cos(kr_0)/(kr_0)}=-\tan(kr_0)\approx-kr_0$$

(2)因有

$$j_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\sin x}{x}$$

$$n_n(x)=(-1)^{n+1}x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\cos x}{x}$$

可得

$$\delta_1\approx\tan\delta_1=\frac{j_1(kr_0)}{n_1(kr_0)}=\frac{kr_0-\tan(kr_0)}{1+kr_0\tan(kr_0)}$$

$$\delta_1\approx-\frac{(kr_0)^3}{3}$$

由此知，在低能情形,即$k\to0$时，$\delta_1\ll\delta_0$。

2. **设算符$\hat{A},\hat{B}$不对易即$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}\neq0$**

但$[\hat{A},\hat{C}]=0\quad[\hat{B},\hat{C}]=0$

(1)计算$[\hat{A},\hat{B}^n],[\hat{A},e^{\hat{B}}],[\hat{A},e^{\lambda\hat{B}}],[\hat{A},f(\hat{B})]$

(2)证明$e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\hat{C}}=e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\frac{1}{2}\hat{C}}$

【答案】(1)①$[\hat{A},\hat{B}^n]=[A,BB^{n-1}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{n-1}+B[A,B^{n-1}]$

$=\hat{C}\hat{B}^{n-1}+\hat{B}[\hat{A},\hat{B}^{n-1}]$

$=\hat{C}\hat{B}^{n-1}+\hat{B}[\hat{C}\hat{B}^{n-2}+\hat{B}[\hat{A},\hat{B}^{n-2}]]$

$=\cdots\cdots$

$=(n-1)\hat{C}\hat{B}^{n-1}+\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]=nCB^{n-1}$

②$e^{\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{B}^n}{n!}$

$$[\hat{A}, e^{\hat{B}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\hat{C}}{n!}\hat{B}^{n-1}$$

$$= \hat{C}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{B}^{n-1}}{(n-1)!} = \hat{C}e^{\hat{B}}$$

③同上$[\hat{A}, e^{\lambda\hat{B}}] = \lambda\hat{C}e^{\lambda\hat{B}}$

④$f(\hat{B}) = \sum_n f_n\hat{B}^n$

$$f'(\hat{B}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B}f(\hat{B}) = \sum_n nf_n\hat{B}^{n-1}$$

因此$[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \sum_n nf_n\hat{B}^n] = \sum_n f_n[\hat{A}, \hat{B}^n]$

$$= \sum_n f_n n\hat{C}\hat{B}^{n-1} = \hat{C}f'(\hat{B})$$

(2) 设$f(\lambda) = e^{\lambda A}e^{\lambda B}$

则$f(0) = 1, f(1) = e^A e^B$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}e^{\lambda A}\right)e^{\lambda B} + e^{\lambda A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}e^{\lambda B} = e^{\lambda A}\hat{A}e^{\lambda B} + e^{\lambda A}\hat{B}e^{\lambda B}$$

由③$[\hat{A}, e^{\lambda B}] = \lambda\hat{C}e^{\lambda B}$

所以$\hat{A}e^{\lambda B} = e^{\lambda B}(\hat{A} + \lambda\hat{C})$

中间用到了$[C, B] = 0$因此$e^{\lambda B}\lambda\hat{C} = \lambda\hat{C}e^{\lambda B}$

$[\hat{B}, \hat{B}] = 0$因此$e^{\lambda B}\hat{B} = \hat{B}e^{\lambda}\hat{B}$

因此：$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = e^{\lambda A}e^{\lambda B}(\hat{A} + \hat{B} + \lambda\hat{C})$

$= f(\lambda)(\hat{A} + \hat{B} + \lambda\hat{C})$

看作关于 f 微分方程结合 f(0)=1　　$f(1) = e^A e^B$

有$f(\lambda) = e^{(\hat{A}+\hat{B})} + \frac{1}{2}\hat{C}\lambda^2$

即$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$

取 x=1 有$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}C} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}C}$

3． 电子在类氢离子势场$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$的定态能量为$E_n = -\frac{Z^2e^2}{2an^2}$，定态波函数为$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$，这是在动能$T = p^2/2\mu$的非相对论近似下得到的结果。现考虑 T 与 p 的相对论修正，计算能级E_n的移动ΔE至$1/c^2$阶，

提示：$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle_{nlm} = \frac{Z}{an^2}$，$\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle_{nlm} = \frac{2Z^2}{(2l+1)a^2n^3}$

【答案】由上题知，考虑相对论修正至$1/c^2$阶，体系的哈密顿量为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r},\quad \hat{H}' = -\frac{\hat{p}^4}{8\mu^3c^2}$$

利用$\hat{H}_0$的表示式，微扰$\hat{H}'$可以表示为

$$\hat{H}'=-\frac{1}{2\mu c^2}\left(\frac{\hat{p}^2}{2\mu}\right)^2=-\frac{1}{2\mu c^2}\left(\hat{H}_0+\frac{Ze^2}{r}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{2\mu c^2}\left[\hat{H}_0^2+Ze^2\left(\hat{H}_0\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\hat{H}_0\right)+\frac{Z^2e^4}{r^2}\right]$$

$\hat{H}_0$的本征能量E_n是n^2度简并的，相应的本征函数为$\psi_{nlm}(r)$。由下式看出，$n^2\times n^2$ 的微扰矩阵的所有非对角元素均为零：

$$H'_{(lm)(l'm')}=\langle nlm|\hat{H}'|nl'm'\rangle\sim\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

一级修正能量

$$\Delta E=E_n^{(1)}=\langle nlm|\hat{H}'|nlm\rangle$$

$$=-\frac{1}{2\mu c^2}\langle nlm|\hat{H}_0^2+Ze^2\left(\hat{H}_0\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\hat{H}_0\right)+\frac{Z^2e^4}{r^2}|nlm\rangle$$

$$=-\frac{1}{2\mu c^2}\left(E_n^2+2Ze^2E_n\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle_{nlm}+Z^2e^4\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle_{nlm}\right)$$

将$E_n=-Z^2e^2/2an^2$及提示的两个公式代入上式，得

$$\Delta E=-\frac{1}{2\mu c^2}\left[\frac{Z^4e^4}{4a^2n^4}-\frac{Z^4e^4}{a^2n^4}+\frac{2Z^4e^4}{(2l+1)a^2n^3}\right]$$

$$=-\frac{Z^4e^4}{2\mu c^2a^2n^4}\left(\frac{2n}{2l+1}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=-\mu c^2\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4\frac{Z^4}{2n^4}\left(\frac{2n}{2l+1}-\frac{3}{4}\right)$$

以上用到玻尔半径表示式$a=\hbar^2/\mu e^2$，其中$e^2/\hbar c=1/137$。

4. **设算符$\hat{A}\hat{B}$与pauli算符$\hat{\sigma}=(\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z)$对易**

求证(1)$(\hat{\sigma}\cdot\hat{A})(\hat{\sigma}\cdot\hat{B})=\hat{A}\cdot\hat{B}+i\hat{\sigma}(A\times B)$

(2)计算$T_r[(\sigma\cdot A)(\sigma\cdot B)]$

【答案】(1)由pauli矩阵性质

$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z=i$

及$\hat{\sigma}_x{}^2=\hat{\sigma}_y{}^2=\hat{\sigma}_z{}^2=1$

将上两式联合写成

$$\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_q=i\sum_r\varepsilon_{pqr}\hat{\sigma}_r+\delta_{pq}$$

于是$(\hat{\sigma}\cdot\hat{A})(\hat{\sigma}\cdot\hat{B})$

$$=(\sum_p\hat{\sigma}_pA_p)(\sum_q\hat{\sigma}_qB_q)$$

$$=\sum_{pq}\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_qA_pB_q$$

$= \sum\limits_{pq} A_p B_p \delta_{pq} + i \sum\limits_{pqr} \varepsilon_{p\cdot q\cdot r} \hat{\sigma}_r A_p B_q$

$= \sum\limits_{a} A_a B_a + i \sum\limits_{p\cdot q\cdot r} \varepsilon_{p\cdot q\cdot r} \hat{\sigma}_r A_p B_q$

$= \hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\boldsymbol{A}} \times \hat{\boldsymbol{B}})$

用到矢量积的张量表达式

$a \cdot b = \sum\limits_i a_i b_i$

$a \cdot (b \times c) = \sum\limits_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

另证：左端

$= (\sigma_x A_x + \sigma_y A_y + \sigma_z A_z)(\sigma_z B_z + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z)$

在(σ^2, σ_2)表象下

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

因此左边$\begin{bmatrix} A_2 & A_z - iA_y \\ A_z + iA_y & -A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{bmatrix}$

右端 $i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\boldsymbol{A}} \times \hat{\boldsymbol{B}})$

$= i(A_y B_z - A_z B_y)\sigma_z + i(A_z B_x - A_x B_z)\sigma_y + i(A_z B_y - B_z A_y)\hat{\sigma}_z$

$\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此$\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\boldsymbol{A}} \times \hat{\boldsymbol{B}}) = (\hat{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{A}})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})$

(2) 由 (1) $T_r[(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{A}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})]$

$= T_r[\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\boldsymbol{A}} \times \hat{\boldsymbol{B}})]$

对任意与$\hat{\sigma}$对易算符$\hat{\boldsymbol{C}}$

$\hat{\sigma} \cdot \hat{C} = \sigma_x C_x + \sigma_y C_y + \sigma_z C_z$

又$T_r \sigma_x = T_r \sigma_y = T_r \sigma_z = 0$

所以 $T_r(\hat{\sigma} \cdot \hat{C})$

$= C_x T_r(\hat{\sigma}_x) + C_y T_r(\hat{\sigma}_y) + C_z T_r(\hat{\sigma}_z) = 0$

因此 $T_r[(\hat{\sigma} \cdot \hat{A})(\hat{\sigma} \cdot \hat{B})]$

$= T_r[\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}}] = \hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} T_r(I) = 2\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}}$

5. 定义平移算符$U_x(a)$，它对波函数$\psi(x)$的作用是

$$U_x(a)\psi(x) = \psi(x-a)$$

其中 a 为实数。(1) 证明$U_x(a) = \mathrm{e}^{-ia\hat{p}_x/\hbar}$； (2) 证明$U_x(a)$为幺正算符。

【答案】 $U_x(a)\psi(x) = \psi(x-a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-a)^n}{n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \psi(x)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-ia\hat{p}_x}{\hbar} \right)^n \psi(x) = \mathrm{e}^{-ia\hat{p}_x/\hbar} \psi(x)$$

2024 年中国矿业大学（徐州）644 量子力学考研题库[仿真+强化+冲刺]

中国矿业大学（徐州）644 量子力学之量子力学教程考研仿真五套模拟题

2024 年量子力学教程考研五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、计算题

1. 氢原子处在基态$\varphi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-\frac{r}{a_0}}$，求：

(1)r 的期望值；

(2)势能$-\frac{e^2}{r}$的期望值；

(3)最可几的半径；

(4)动能的期望值；

(5)动量的概率分布函数。

【答案】基态$\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}e^{-r/a_0}$

(1)$\bar{r}=\int\psi_{100}{}^*r\psi_{100}\,\mathrm{d}^3r$

在球坐标下计算

$$\bar{r}=2\pi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}e^{-r/a_0}\right)^2r^3\mathrm{d}r=\frac{4}{a_0{}^3}\int_0^\infty r^3e^{-\frac{2r}{a_0}}\mathrm{d}r$$

利用积分公式$\int_0^\infty\xi^{n-1}e^{-\xi}\mathrm{d}\xi=\Gamma(n)=(n-1)!$ 得

$$\bar{r}=\frac{3}{2}a_0$$

(2)$U=-\frac{e^2}{r}$

$\bar{U}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^\infty\left(-\frac{e^2}{r}\right)\frac{1}{\pi a_0{}^3}e^{-2r/a_0}r^2\mathrm{d}r$

$=-\frac{4e^2}{a_0{}^3}\int_0^\infty re^{-2r/a_0}\mathrm{d}r$

同样利用积分公式得

$$\bar{U}=-\frac{e^2}{a_0}$$

(3)径向概率分布

$$\omega(r)\mathrm{d}r=R(r)r^2\mathrm{d}r=\int|\psi_{100}|^2\mathrm{d}\Omega\cdot r^2\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\frac{1}{\pi a_0{}^3}e^{-2r/a_0}(r^2\mathrm{d}r)$$

$$=\frac{4}{a_0^3}r^2e^{-2r/a_0}\mathrm{d}r$$

对$R(r)r^2$求导为零即

$e^{-2r/a_0}\left[r^2\cdot\left(-\frac{2}{a_0}\right)+2r\right]=0\quad r=a_0$即最可几半径

(4)当波函数只有径向坐标 r

$$T=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2=\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\overline{T}=\int\psi_{100}{}^*\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\right)\psi_{100}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi a_0{}^3}e^{-r/a_0}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r/a_0}\right)\right]r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\hbar^2}{\mu a_0{}^4}\left[\int_0^{+\infty}2re^{-2r/a_0}\mathrm{d}r-\frac{1}{a_0}\int_0^{\infty}r^2e^{-2r/a_0}\mathrm{d}r\right]$$

利用前面积分公式$\int_0^{\infty}\xi^{n-1}e^{-\xi}\mathrm{d}\xi=\Gamma(n)$得

$$\overline{T}=\frac{e^2}{2a_0}$$

(5)动量表象波函数是坐标表象波函数的傅里叶变换

$$\psi(p)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3}\int e^{\frac{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}}\psi_{100}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}e^{\frac{-ipr\cos\theta}{\hbar}}e^{-r/a_0}r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{(2a_0\hbar)^{3/2}\hbar}{\pi(a_0{}^2p^2+\hbar^2)^2}$$

于是概率分布函数$|\psi(p)|^2=\frac{\hbar^2(2a_0\hbar)^3}{\pi^2(a_0{}^2p^2+\hbar^2)^4}$

2. 空间转子作受碍转动，哈密顿量为 $\hat{H}=A\hat{L}^2+B\hbar^2\cos2\varphi$，其中 A 与 B 为正实数，且$A\gg B$，试计算 p 能级(l=1)的分裂，及零级近似波函数。

【答案】 $\hat{H}_0=A\hat{L}^2$，$\hat{H}'=B\hbar^2\cos2\varphi$ (1)

$\hat{H}_0$的本征值为$E_l^{(0)}=l(l+1)A\hbar^2$，相应的本征函数为$Y_{lm}(\theta,\varphi)$，$l=0,1,2,\cdots$，　$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$．$p$能级$E_1^{(0)}=2A\hbar^2$是三度简并的，对应的 3 个波函数记为

$$\varphi_1=Y_{11}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\quad \varphi_2=Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad (2)$$

$$\varphi_3=Y_{1,-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

令零级近似波函数为

$$\psi^{(0)}=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3 \quad (3)$$

系数c_1,c_2,c_3满足方程

$$\begin{pmatrix}H'_{11}-E^{(1)} & H'_{12} & H'_{13}\\ H'_{21} & H'_{22}-E^{(1)} & H'_{23}\\ H'_{31} & H'_{32} & H'_{33}-E^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0 \quad (4)$$

其中

$$H'_{ij}=\int\varphi_i^*\hat{H}'\varphi_j\mathrm{d}\Omega=B\hbar^2\int\varphi_i^*\cos2\varphi\varphi_j\mathrm{d}\Omega,\quad i,j=1,2,3 \quad (5)$$

将式(2)代入式(5)计算H'_{ij}，结果是，除$H'_{13}=H'_{31}=-B\hbar^2/2$之外，其余$H'_{ij}=0$。方程(4)变为

$$\begin{pmatrix} -E^{(1)} & 0 & -B\hbar^2/2 \\ 0 & -E^{(1)} & 0 \\ -B\hbar^2/2 & 0 & -E^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=0 \tag{6}$$

由久期方程

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & 0 & -B\hbar^2/2 \\ 0 & -E^{(1)} & 0 \\ -B\hbar^2/2 & 0 & -E^{(1)} \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

解得

$$E_1^{(1)}=-\frac{B\hbar^2}{2},\ E_2^{(1)}=0,\ E_3^{(1)}=\frac{B\hbar^2}{2} \tag{8}$$

将$E_i^{(1)}(i=1,2,3)$代入方程(6)，并利用归一化条件

$$|c_1|^2+|c_2|^2+|c_3|^2=1 \tag{9}$$

求出同$E_1^{(1)}$，$E_2^{(1)}$，$E_3^{(1)}$相应的

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

于是,一级近似能量和零级近似波函数为

$$E_1=2A\hbar^2-\frac{B\hbar^2}{2},\ \psi_1^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[Y_{11}(\theta,\varphi)+Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right]$$

$$E_2=2A\hbar^2,\qquad \psi_2^{(0)}=Y_{10}(\theta,\varphi) \tag{11}$$

$$E_3=2A\hbar^2+\frac{B\hbar^2}{2},\ \psi_3^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[Y_{11}(\theta,\varphi)-Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right]$$

3. 设算符$\hat{A},\hat{B}$不对易即$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}\neq 0$

但$[\hat{A},\hat{C}]=0\quad[\hat{B},\hat{C}]=0$

(1)计算$[\hat{A},\hat{B}^n]$,$[\hat{A},e^{\hat{B}}]$,$[\hat{A},e^{\lambda\hat{B}}]$,$[\hat{A},f(\hat{B})]$

(2)证明 $e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\hat{C}}=e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\frac{1}{2}\hat{C}}$

【答案】(1)①$[\hat{A},\hat{B}^n]=[A,BB^{n-1}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{n-1}+B[A,B^{n-1}]$

$=\hat{C}\hat{B}^{n-1}+\hat{B}[\hat{A},\hat{B}^{n-1}]$

$=\hat{C}\hat{B}^{n-1}+\hat{B}[\hat{C}\hat{B}^{n-2}+\hat{B}[\hat{A},\hat{B}^{n-2}]]$

$=\cdots\cdots$

$=(n-1)\hat{C}\hat{B}^{n-1}+\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]=nCB^{n-1}$

②$e^{\hat{B}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{B}^n}{n!}$

$[\hat{A},e^{\hat{B}}]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\hat{A},\hat{B}^n]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\hat{C}}{n!}\hat{B}^{n-1}$

$$=\hat{C}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{B}^{n-1}}{(n-1)!}=\hat{C}e^{\hat{B}}$$

③同上$[\hat{A},e^{\lambda\hat{B}}]=\lambda\hat{C}e^{\lambda\hat{B}}$

④$f(\hat{B})=\sum_n f_n\hat{B}^n$

$$f'(\hat{B})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{B}}f(\hat{B})=\sum_n nf_n\hat{B}^{n-1}$$

因此$[\hat{A},f(\hat{B})]=[\hat{A},\sum_n nf_n\hat{B}^n]=\sum_n f_n[\hat{A},\hat{B}^n]$

$$=\sum_n f_n n\hat{C}\hat{B}^{n-1}=\hat{C}f'(\hat{B})$$

(2)设$f(\lambda)=e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}$

则$f(0)=1, f(1)=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}e^{\lambda\hat{A}}\right)e^{\lambda\hat{B}}+e^{\lambda\hat{A}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}e^{\lambda\hat{B}}=e^{\lambda\hat{A}}\hat{A}e^{\lambda\hat{B}}+e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{\lambda\hat{B}}$$

由③$[\hat{A},e^{\lambda\hat{B}}]=\lambda\hat{C}e^{\lambda\hat{B}}$

所以$\hat{A}e^{\lambda\hat{B}}=e^{\lambda\hat{B}}(\hat{A}+\lambda\hat{C})$

中间用到了$[C,B]=0$因此$e^{\lambda\hat{B}}\lambda\hat{C}=\lambda\hat{C}e^{\lambda\hat{B}}$

$[\hat{B},\hat{B}]=0$因此$e^{\lambda\hat{B}}\hat{B}=\hat{B}e^{\lambda}\hat{B}$

因此：$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}=e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}(\hat{A}+\hat{B}+\lambda\hat{C})$

$=f(\lambda)(\hat{A}+\hat{B}+\lambda\hat{C})$

看作关于 f 微分方程结合 f(0)=1　　$f(1)=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$

有$f(\lambda)=e^{(\hat{A}+\hat{B})}+\frac{1}{2}\hat{C}\lambda^2$

即$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}=e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$

取 x=1 有$e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\hat{C}}=e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\frac{1}{2}\hat{C}}$

4． 一质量为μ约束在平面上、沿一定半径 **R** 绕 **z** 轴转动的平面转子初始时刻的粒子波函数为$\psi(\varphi,0)=A\cos^2\varphi$，**求粒子在任意$t\geq 0$时刻：(1)波函数；(2)角动量的可能值、相应的概率以及平均值，并回答这些值是否受时间影响；(3)处于第二能量激发态的概率。**

【答案】平面转子：$\hat{H}=\frac{\hat{L}_z^2}{2I}=\frac{\hat{L}_z^2}{2\mu R^2}$

$\hat{L}_z$为守恒量，$(\hat{H},\hat{L}_z)$的共同本征态为$\phi_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$，$\hat{H},\hat{L}_z$的本征值分别为

$$\frac{\hbar^2m^2}{2\mu R^2},m\hbar,\quad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

初始时刻：

$$\psi(\varphi,0)=A\cos^2\varphi=\frac{A}{2}\sqrt{2\pi}\left(\phi_0+\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{2}\phi_{-2}\right)$$

由归一化条件可得

$$A=\frac{2}{\sqrt{3\pi}}$$

即