全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年中国矿业大学

（北京）601高等数学考研精品资料

策划：辅导资料编写组

【初试】2024 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清 PDF 电子版支持打印，考研首选资料。

一、中国矿业大学（北京）601 高等数学考研真题及重点名校真题汇编及考研大纲

0．中国矿业大学（北京）601 高等数学 2020 年考研真题，暂无答案。

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

1．附赠重点名校：高等数学 2016-2022 年考研真题汇编（暂无答案）

说明：赠送重点名校考研真题汇编，因不同院校真题相似性极高，甚至部分考题完全相同，建议考生备考过程中认真研究其他院校的考研真题。

2.中国矿业大学（北京）601 高等数学考研大纲

①2019 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研大纲。

②2023 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研大纲。

说明：考研大纲给出了考试范围及考试内容，是考研出题的重要依据，同时也是分清重难点进行针对性复习的首选资料，本项为免费提供。

二、2024 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研资料

3．《高等数学》考研相关资料

（1）《高等数学》[笔记+课件+提纲]

①中国矿业大学（北京）601 高等数学之《高等数学》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（北京）601 高等数学之《高等数学》本科生课件。

说明：参考书配套授课 PPT 课件，条理清晰，内容详尽，版权归属制作教师，本项免费赠送。

③中国矿业大学（北京）601 高等数学之《高等数学》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《高等数学》考研核心题库（含答案）

①中国矿业大学（北京）601 高等数学考研核心题库之选择题精编。

②中国矿业大学（北京）601 高等数学考研核心题库之填空题精编。

③中国矿业大学（北京）601 高等数学考研核心题库之解答题精编。

④中国矿业大学（北京）601 高等数学考研核心题库之计算题精编。

⑤中国矿业大学（北京）601 高等数学考研核心题库之证明题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习首选资料。

（3）《高等数学》考研模拟题[仿真+强化+冲刺]

①2024 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习首选。

③2024 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺首选资料。

三、电子版资料全国统一零售价

4. **本套考研资料包含以上一、二部分（高清 PDF 电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]**

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024 年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5. **中国矿业大学（北京）601 高等数学考研初试参考书**

《高等数学》（上下册），同济大学编，高等教育出版社。

五、本套考研资料适用学院和专业及考试题型

地球科学与测绘工程学院：地质学

选择题、填空题、计算题、证明题、应用题和综合解

目录

2024年中国矿业大学（北京）601高等数学备考信息

中国矿业大学（北京）601高等数学考研初试参考书目

《高等数学》（上下册），同济大学编，高等教育出版社。

中国矿业大学（北京）601高等数学考研招生适用院系及考试题型

地球科学与测绘工程学院：地质学

选择题、填空题、计算题、证明题、应用题和综合解

中国矿业大学（北京）601 高等数学历年真题汇编

中国矿业大学（北京）601 高等数学 2020 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学（北京）

二〇二〇年硕士研究生入学考试试题

科目名称：高等数学　　　　共 3 页　第 1 页

一、单项选择题。（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1、已知 a 为常数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{ax}=e^2$，则________

(A) $a=1$　(B) $a=-1$　(C) $a=2$　(D) $a=-2$

2、$x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的________

(A) 连续点　(B) 可去间断点　(C) 跳跃间断点　(D) 无穷间断点

3、设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，其周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为________

(A) 2　(B) -2　(C) 1　(D) -1

4、设 $f(x)=\sin ax$，则 $\int xf''(x)dx=$________

(A) $\dfrac{x}{a}\cos ax-\sin ax+C$　(B) $ax\cos ax-\sin ax+C$

(C) $\dfrac{x}{a}\sin ax-a\cos ax+C$　(D) $ax\sin ax-a\cos ax+C$

5、直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+6}{1}$ 与平面 $\Pi:x+y-2z-3=0$ 的夹角是________

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

6、二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处________

(A) 连续且偏导数存在　(B) 连续但偏导数不存在

(C) 不连续但偏导数存在　(D) 不连续且偏导数不存在

7、设 xOy 平面上区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge x\}$，$D_1$ 是 D 在第一象限的部分，则

（所有答案必须写在答题纸上,试题和答卷一起交回）

命题时间：2019 年 11 月 12 日

中国矿业大学（北京）

二〇二〇年硕士研究生入学考试试题

科目名称：高等数学 共 3 页 第 2 页

$\iint_D \left(xy^3+\sin^2 x\sin y\right)dxdy=$______

(A) $2\iint_{D_1}\sin^2 x\sin y dxdy$　　(B) $2\iint_{D_1}xy^3 dxdy$

(C) $4\iint_{D_1}\left(xy^3+\sin^2 x\sin y\right)dxdy$　　(D) 0

8、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$（$k>0$ 为常数）______

(A) 发散　(B) 条件收敛　(C) 绝对收敛　(D) 收敛性与 k 有关

二、填空题。（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\frac{1}{n}=$______

2、积分 $\int_{-1}^{1}\left(|x|+x^5\right)e^{|x|}dx=$______

3、曲线 $y=x^3-3x^2-9x+5$ 的拐点坐标为______

4、曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应点处的切线方程为______

5、曲线 $y=\dfrac{3x^3}{x^2+1}$ 的斜渐近线方程为______

6、过点 $M_0(2,4,0)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}x+2z-1=0\\ y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程为______

7、曲面 $x^2y+\ln(1+z)-\cos z=1$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为______

8、设 $z=f(x+y,x-y)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______

9、二次积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{2x}\cos y^2dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_x^{1}\cos y^2dy=$______

（所有答案必须写在答题纸上,试题和答卷一起交回）

命题时间：2019 年 11 月 12 日

中国矿业大学（北京）

二〇二〇年硕士研究生入学考试试题

科目名称：高等数学　　　　共 3 页　第 3 页

10、设 L 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上对应于 t 从 0 变到 2 的这段弧，则曲线积分 $\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=$ ________

三、解答题。（本题共 8 小题，共 78 分。解答应写出必要文字说明、证明过程或验算步骤）

1、（本题满分 9 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2 dt}{x^2-\sin x^2}$.

2、（本题满分 9 分）计算不定积分 $\int\frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$.

3、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且满足

$$f(a)f(b)>0,\quad f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0,$$

证明：对每个实数 k，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$.

4、（本题满分 10 分）求函数 $z=x+y+\frac{1}{xy}(x>0,y>0)$ 的极值.

5、（本题满分 10 分）计算三重积分 $\iiint_\Omega\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x^2y\right)dv$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le 2z$.

6、（本题满分 10 分）设曲线积分 $\int_L (f(x)-e^x)\sin y dx-f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 的一阶导数连续，且 $f(0)=0$.（1）求 $f(x)$；（2）计算曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(f(x)-e^x)\sin y dx-f(x)\cos y dy$.

7、（本题满分 10 分）计算第二类曲面积分 $\iint_S z^2e^y dydz+e^z\sin^2 x dzdx+(x^2+y^2)zdxdy$，其中 S 为曲面 $z=2-x^2-y^2(1\le z\le 2)$ 的上侧.

8、（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛域与和函数.

（所有答案必须写在答题纸上,试题和答卷一起交回）

命题时间：2019 年 11 月 12 日

中国矿业大学（北京）601 高等数学考研大纲

2023 年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研大纲

《高等数学》考试大纲

学院（盖章）： 负责人（签字）：

专业代码： 专业名称：

考试科目代码：601 考试科目名称：高等数学

（一）考试内容

试题以同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第六版）（高等教育出版社）为主，内容涵盖该教材的第一至十二章，共十二章内容。内容包括：函数、极限、连续，一元微积分，常微分方程，空间解析几何与向量代数，多元微积分和无穷级数。

试题重点考查的内容：

1. 函数、极限、连续

求数列的极限和函数的极限；求函数的连续区间、间断点并判断间断点的类型；闭区间上连续函数性质的应用.

2. 一元微积分

求函数的导数和微分，简单初等函数的高阶导数，隐函数与参数方程的二阶导数，隐函数在某点处的一阶和二阶导数；用导数定义或左右导数定义讨论分段函数在衔接点处的导数。

中值定理及其应用；用洛必达法则求极限；研究函数的单调性及曲线的凹凸性；求极值、最值、拐点、曲率和曲率半径；求曲线在某点处的切线方程和法线方程。

不定积分的计算。注意计算不定积分的基本方法是分析被积函数的特点，联想基本积分公式，通过第一类换元积分法（凑微分法）、代数恒等变形（如四则运算，分子、分母有理化，因式分解等）、三角恒等变形、变量代换（第二类换元积分法）、分部积分法等将被积函数转化到基本公式。

积分上限函数求导；定积分的计算与定积分有关的证明问题；广义积分的计算；求平面图形的面积，特殊立体的体积，平面曲线的弧长。

3. 常微分方程

求特殊类型一阶方程的通解或特解，包括通过适当变换可化成特殊类型方程的求解；求可降阶的二阶方程的通解或特解；求二阶常系数非齐次线性方程的通解或特解；会解简单的应用问题。

4. 空间解析几何与向量代数

求向量的数量积、向量积，判断向量间的关系；建立空间平面与直线的方程，判别两直线间、两平面间及直线与平面的位置关系，求点到直线、点到平面的距离；建立常用空间曲面与空间曲线的方程，求空间图形在坐标面的投影。

5. 多元微积分

求多元复合函数、隐函数（组）的偏导数与全微分；求高阶偏导数；求抽象函数的偏导数与高阶偏导数；多元函数微分学的几何应用；方向导数与梯度；多元函数的极值问题

利用直角坐标计算重积分， 利用直角坐标、极坐标计算二重积分；利用直角坐标、柱坐标与球坐标计算三重积分；重积 重积分的几何与物理应用。

两类线面积分的计算，格林公式的应用，高斯公式的应用，平面上曲线积分与路径无

关的条件，二元函数的全微分求解，线、面积分的几何与物理应用。

6. 无穷级数

常数项级数判敛散与求和；求幂级数的收敛域及和函数；把函数展开成幂级数。

（二）考试的基本要求

（1）基本概念、基本理论清楚，基本计算熟练，注意在理解的基础上灵活应用，切忌死记硬背。

（2）对知识要会综合运用，注重各知识点之间的联系和对知识点的综合运用。复习时要注意教材各章节之间的联系，对后续章节会利用前述章节的内容、方法分析问题和解决问题，注意前后呼应，融会贯通。

三）考试基本题型

基本题型可能有：选择题、填空题、计算题、证明题、应用题和综合解答题等。

2019年中国矿业大学（北京）601高等数学考研大纲

中国矿业大学（北京）2019年研究生招生考试
专业课考试内容范围及参考书

考试科目代码：601
考试科目名称：高等数学
（一）考试内容
试题以同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第六版）（高等教育出版社）为主，内容涵盖该教材的第一至十二章，共十二章内容。内容包括：函数、极限、连续，一元微积分，常微分方程,空间解析几何与向量代数,多元微积分和无穷级数。
试题重点考查的内容 ：
1. 函数、极限、连续
求数列的极限和函数的极限；求函数的连续区间、 间断点并判断间断点的类型； 闭区间上连续函数性质的应用.
2. 一元微积分
求函数的导数和微分,简单初等函数的高阶导数,隐函数与参数方程的二阶导数,隐函数在某点处的一阶和二阶导数；用导数定义或左右导数定义讨论分段函数在衔接点处的导数。中值定理及其应用；用洛必达法则求极限；研究函数的单调性及曲线的凹凸性；求极值、最值、拐点、曲率和曲率半径；求曲线在某点处的切线方程和法线方程。
不定积分的计算。注意计算不定积分的基本方法是分析被积函数的特点，联想基本积分公式，通过第一类换元积分法（凑微分法）、代数恒等变形（如四则运算，分子、分母有理化，因式分解等）、三角恒等变形、变量代换（第二类换元积分法）、分部积分法等将被积函数转化到基本公式。
积分上限函数求导；定积分的计算与定积分有关的证明问题；广义积分的计算；求平面图形的面积，特殊立体的体积，平面曲线的弧长。
3. 常微分方程
求特殊类型一阶方程的通解或特解，包括通过适当变换可化成特殊类型方程的求解；求可降阶的二阶方程的通解或特解；求二阶常系数非齐次线性方程的通解或特解；会解简单的应用问题。
4. 空间解析几何与向量代数
求向量的数量积、向量积，判断向量间的关系；建立空间平面与直线的方程，判别两直线间、两平面间及直线与平面的位置关系，求点到直线、点到平面的距离；建立常用空间曲面与空间曲线的方程，求空间图形在坐标面的投影。
5. 多元微积分
求多元复合函数、隐函数（组）的偏导数与全微分；求高阶偏导数；求抽象函数的偏导数与高阶偏导数；多元函数微分学的几何应用；方向导数与梯度；多元函数的极值问题利用直角坐标计算重积分， 利用直角坐标、极坐标计算二重积分；利用直角坐标、柱坐标与球坐标计算三重积分；重积 重积分的几何与物理应用。两类线面积分的计算，格林公式的应用，高斯公式的应用，平面上曲线积分与路径无关的条件，二元函数的全微分求解，线、面积分的几何与物理应用。
6. 无穷级数
常数项级数判敛散与求和；求幂级数的收敛域及和函数；把函数展开成幂级数。
（二）考试的基本要求
（1）基本概念、基本理论清楚，基本计算熟练，注意在理解的基础上灵活应用，切忌死记硬背。
（2）对知识要会综合运用，注重各知识点之间的联系和对知识点的综合运用。复习时要注意教材各章节之间的联系，对后续章节会利用前述章节的内容、方法分析问题和解决问题，注意前后呼应，融会贯通。
（三）考试基本题型
基本题型可能有：选择题、填空题、计算题、证明题、应用题和综合解答题等。

第 16 页 共

2024年中国矿业大学（北京）601高等数学考研核心笔记

《高等数学》考研核心笔记

第1章　函数与极限

考研提纲及考试要求

考点：集合
考点：映射
考点：函数
考点：数列的概念
考点：数列的几何意义

考研核心笔记

【核心笔记】映射与函数

1.集合

（1）集合概念：
集合（简称集）：集合是指具有某种特定性质的事物的总体。用A，B，M等表示。
元素：组成集合的事物称为集合的元素。a是集合M的元素表示为$a\in M$。
集合的表示：
列举法：把集合的全体元素一一列举出来。
描述法：若集合M是由元素具有某种性质P的元素x的全体所组成，则M可表示为：
$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$。
几个数集：
N表示所有自然数构成的集合，称为自然数集。
$N=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。$N^+=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。
R表示所有实数构成的集合，称为实数集。
Z表示所有整数构成的集合，称为整数集。
$Z=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$。
Q表示所有有理数构成的集合，称为有理数集。

$$\boldsymbol{Q}=\{\frac{p}{q}|p\in Z,q\in \boldsymbol{N}^+\text{且}p\text{与}q\text{互质}\}$$

子集：若$x\in A$，则必有$x\in B$，则称A是B的子集，记为$A\subset B$（读作A包含于B）或$B\supset A$
如果集合A与集合B互为子集，$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与集合B相等，记作$A=B$
若$A\subset B$且$A\neq B$，则称A是B的真子集，记作$A\subsetneqq B$。
例如，$N\subsetneqq Z\subsetneqq Q\subsetneqq R$
不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。规定空集是任何集合的子集。
（2）集合的运算
设A、B是两个集合，由所有属于A或者属于B的元素组成的集合称为A与B的并集（简称并），记作$A\cup B$，即：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。
设A、B是两个集合，由所有既属于A又属于B的元素组成的集合称为A与B的交集（简称交），记

作 $A\cap B$，即：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\backslash B$，即：$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$。

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集。此时，我们称集合 I 为全集或基本集。称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 AC。

集合运算的法则：

设 A、B、C 为任意三个集合，则

①交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

②结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

③分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

④对偶律 $(A\cup B)C=AC\cap BC$，$(A\cap B)C=AC\cup BC$。

$(A\cup B)C=AC\cap BC$ 的证明：

$x\in(A\cup B)C\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in AC$ 且 $x\in BC\Leftrightarrow x\in AC\cap BC$，所以 $(A\cup B)C=AC\cap BC$。

直积（笛卡儿乘积）：

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对（x，y），把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$A\times B=\{(x,y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$。

（3）区间和邻域

有限区间：设 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a,b)，即：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$。

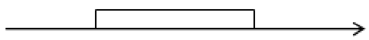
类似地有：

$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$、$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$ 称为半开区间。

其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度。

无限区间：$[a,+\infty)=\{x|a\le x\}$，$(-\infty,b]=\{x|x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$。

区间在数轴上的表示：



邻域：以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$。

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$。

即：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$。

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

2. 映射

（1）映射的概念

定义设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作：$f: X\to Y$。

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即：$y=f(x)$。

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即：$D_f=X$。

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记为 R_f，或 $f(X)$，即：$R_f=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$。

需要注意的问题：

①构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 D_f=X；集合 Y，即值域的范围：$R_f \subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 y=f（x）与之对应。

②对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 R_f=Y。

③f：$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$，对每个 $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，f（x）=sinx。

f 是一个映射，定义域 Df=$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，值域 Rf=[−1，1]。

满射、单射和双射：

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 R_f=Y，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 f（x_1）≠f（x_2），则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）。

（2）逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，适合 f（x）=y，于是，我们可定义一个从 Rf 到 X 的新映射 g，即：g：$R_f \to X$。

对每个 $y \in R_f$，规定 g（y）=x，这 x 满足 f（x）=y。这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}$=X。

按上述定义，只有单射才存在逆映射。上述三例中哪个映射存在逆映射？

设有两个映射：

$$g: X \to Y_1,\quad f: Y_2 \to Z$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$。则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映射成 $f[g(x)] \in Z$。显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 fog，即

$$fog: X \to Z,\quad (fog)(x)=f[g(x)],\ x \in X$$

应注意的问题：

映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，$R_g \subset D_f$。否则，不能构成复合映射。由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，fog 有意义并不表示 gof 也有意义。即使 fog 与 gof 都有意义，复映射 fog 与 gof 也未必相同。

3. 函数

（1）函数概念

定义设数集 $D \subset R$，则称映射 f：$D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为：y=f（x），$x \in D$，

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 D_f=D。

应注意的问题：

记号 f 和 f（x）的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号“f（x），$x \in D$”或“y=f（x），$x \in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f。

函数符号：函数 y=f（x）中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母，例如“F”，“φ”等。此时函数就记作 y=φ（x），y=F（x）。

函数的两要素：

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 R 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f。如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

函数的定义域：

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 t=0，落

地的时刻 t=T，则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2，t\in[0，T]。$$

这个函数的定义域就是区间[0，T]；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“y=f（x）”表达，而不必再表出 D_f。

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间[−1，1]，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间（−1，1）。

单值函数与多值函数：

在函数的定义中，对每个 x∈D，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数。如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 x∈D，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个多值函数。

例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出。显然，对每个 x∈[−r，r]，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 x=r 或 x=−r 时，对应 y=0 一个值；当 x 取（−r，r）内任一个值时，对应的 y 有两个值。所以这方程确定了一个多值函数。

对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支。

例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“y≥0”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 y≥0”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“y≤0”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 y≤0”作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$。

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），这在中学里大家已经熟悉。其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

{P（x，y）|y=f（x），x∈D}

称为函数 y=f（x），x∈D 的图形。图中的 Rf 表示函数 y=f（x）的值域。

（2）函数的几种特性

①函数的有界性

设函数 f（x）的定义域为 D，数集 X⊂D。如果存在数 K_1，使对任一 x∈X，有 f（x）≤K_1，则称函数 f（x）在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 f（x）在 X 上的一个上界。图形特点是 y=f（x）的图形在直线 y=K_1 的下方。

如果存在数 K_2，使对任一 x∈X，有 f（x）≥K_2，则称函数 f（x）在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 f（x）在 X 上的一个下界。图形特点是，函数 y=f（x）的图形在直线 y=K2 的上方。

如果存在正数 M，使对任一 x∈X，有|f（x）|≤M，则称函数 f（x）在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 f（x）在 X 上无界。图形特点是，函数 y=f（x）的图形在直线 y=−M 和 y=M 的之间。

函数 f（x）无界，就是说对任何 M，总存在 x_1∈X，使|f（x）|>M。

②函数的单调性

设函数 y=f（x）的定义域为 D，区间 I⊂D。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 f（x_1）<f（x_2）

则称函数 f（x）在区间 I 上是单调增加的。

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 f（x_1）>f（x_2），则称函数 f（x）在区间 I 上是单调减少的。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

③函数的奇偶性

2024年中国矿业大学（北京）601高等数学考研辅导课件

《高等数学》考研辅导课件

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、集合

1、概念 具有某种特定性质的事物的总体;

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

元素a属于集合M， 记作 a P M

元素a不属于集合M， 记作 a∈M

2、集合的表示法

列举法 A © $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

描述法 M ©{x|x所具有的特征}

3、集合间的关系

若$x \in A$,则必$x \in B$,就说A是B的子集. 记作 A T B.

例1 数集 N----自然数集 Z----整数集

Q----有理数集 R----实数集

它们间关系： N T Z, Z T Q, Q T R.

若A T B,且B T A,就称集合A与B相等. (A © B)

例2 A © {1, 2}， C ©{x|x^2 ⌠3x⌡ 2 ©0},

则 A © C .

不含任何元素的集合称为空集，记作 Z

例如, {x|x P R, x^2 ⌡1 ©0} = ∅

规定 空集为任何集合的子集.

4、运算

设A、B是两集合， 则

交 "AΨB" E {xχxPA且xPB}

并 "AΞB" E {xχxPA或xPB}

差 "A−B" E {xχxPA但xΘB}

补（余） A^c E I−A （其中I为全集）.

5、其运算律

(1) A Ψ B = B Ψ A A Ξ B = B Ξ A

(2) (A ΞB) Ξ C = A Ξ (B Ξ C)

(A Ψ B) = A Ψ (B Ψ C)

(3) (A Ξ B) Ψ C = (A Ψ C) Ξ (B Ψ C)

(A Ψ B) Ξ C = (A Ξ C) Ψ (B Ξ C)

(4) (A Ψ B)^c ©A^c Ξ B^c, (A Ξ B)^c ©A^C Ψ B^C

注:

A与B的直积 AλB E {(x, y)χxPA 且 yPB}

例如: RλR = {(x, y)χxPR 且 yPR}

表示xoy面上全体点的集合

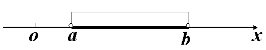
RλR常记为R^2

2、区间

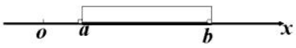
是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

⌡ a, b P R, 且a ™ b.

{x|a ™x ™b} 称为开区间，记作 (a, b)



$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$



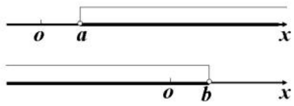
$\{x \mid a \le x < b\}$ 称为半开区间，记作 $[a,b)$

$\{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间，记作 $(a,b]$

有限区间

无限区间：

$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x\}$　　$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$



区间长度的定义:

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

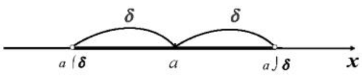
3、邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$.

数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，

点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径.

记作 $U_\delta(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$.



点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}_\delta(a)$.

$$\overset{0}{U}_\delta(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

注意：邻域总是开集。

二、映射

1、概念

设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射. 记作 $f: X \to Y$.

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$

元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的原像

集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

注:

1° 构成映射的三个要素:

集合 X,即定义域 $D_f=X$;

集合 Y,即值域的范围:$R_f \subset Y$;

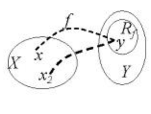
对应法则 f,使对每个 $x\in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

2° 对每个 $x\in X$,元素 x 的像是唯一的;

而对每个 $y\in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;

映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

但定义域一定等于集合 X.



例3 设 $f:R\to R$,对每个 $x\in R$, $f(x) = x^2$.

显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=R$ 值域 $R_f = \{y \mid y\ge 0\}$,

它是 R 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y,除 $y=0$ 外,它的原像不是唯一的. 如 $y = 4$ 的原像就有 $x = 2$，$x = -2$ 两个.

例4 设 $X=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$, $Y=\{(x,0) \mid |x|\le 1\}$，$f:X\to Y$,对每个 $(x,y)\in X$，值域 $R_f=Y$.

在几何上,这个映射表示把平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间[-1,1]上.

定义 设f是从集合X到集合Y的映射,若$R_f=Y$,即Y中任一元素y都是X中某元素的像,则称f为X到Y上的映射或满射;

若对X中任意两个不同元素$x_1\neq x_2$它们的像$f(x_1)\neq f(x_2)$,则称f为X到Y的单射(或"如果$f(x_1)=f(x_2)$,就有$x_1=x_2$);

若映射f既是单射,又是满射,则称f为一一映射(或双射).

例4中的映射,既非满射($y=-2$,不是X中的某元素的像),又非单射($x_1=2,x_2=-2$,它们的像相等).

例5的映射不是单射,是满射.($Y[-1,1]$表示满射,

$X:(x=0,y=1)\to Y:(0,0)$ $X:(x=0,y=-1)\to Y:(0,0)$);

映射又称算子,在不同的数学分支中,有不同的惯用名称:

从非空集X到数集Y的映射称为X上的泛函.

从非空集X到它自身的映射又称为X上的变换.

从实数集X到实数集Y的映射通常称为定义在X上的函数.

2. 逆映射与复合映射

1)逆映射

设f是X到Y的单射,则对每个$y\in R_f$,有唯一的$x\in X$适合$f(x)=y$,定义一个新的映射$g:R_f\to X$,对每个$y\in R_f$,规定$g(y)=x$,这x满足$f(x)=y$.

这个映射g称为f的逆映射,记作f^{-1}.

定义域$D_{f^{-1}}=R_f$,值域$R_{f^{-1}}=X$

注:只有单射才存在逆映射.

因为从X→Y对Y要求唯一的,而Y→X又是唯一的,故只有单射.

2)复合映射

设有两个映射

$$g: X\to Y_1,\ f: Y_2\to Z \qquad (Y_1\subset Y_2)$$

则由g和f可确定了一个从X到Z的映射,它将每个$x\in X$映成$f[g(x)]\in Z$,这个映射称为映射g和f构成的复合映射,记作$f\cdot g$,即

$$f\cdot g: X\to Z$$

$$(f\cdot g)(x)=f[g(x)],\quad x\in X$$

注 1° 映射g和f构成复合映射的条件:

g的值域R_g必须包含在f的定义域内,即$R_g\subset D_f$.

否则,不能构成复合映射.

2° 映射g和f的复合是有顺序的:

$f\cdot g$有意义并不表示$g\cdot f$也有意义.即使$f\cdot g$与$g\cdot f$都有意义,复合映射$g\cdot f$和$f\cdot g$也不一定相同.

例5 f是X到Y上可逆映射的充分必要条件是f为X到Y的双射.

证明:充分性(由条件推出结果)

设f是$X\to Y$的双射.在Y上任一元素y必定存在唯一的$x\in X$,使$y=f(x)$. (1)

从$Y\to X$的映射 $f^{-1}: Y\to X$. (2)

对任何$x\in X$, 由(1),(2)可得

$f^{-1}f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$. 即$f^{-1}f=I_X$

反之. 对任何$y\in Y$, 由(2), (1)可得

$ff^{-1}(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$. 即$ff^{-1}=I_Y$

必要性 (由结果推出条件)

f是可逆的,存在f^{-1}: $Y\to X$ 使$f^{-1}f=I_X$, $ff^{-1}=I_Y$

对X中任意两个元素x_1, x_2, 当$f(x_1)=f(x_2)$时

$x_1=f^{-1}f(x_1)=f^{-1}(f(x_1))=f^{-1}(f(x_2))=f^{-1}f(x_2)=x_2$

f是单射

另一方面, 对任意$y\in Y$, $y=ff^{-1}(y)=f(f^{-1}(y))$ (3)

由(3)我们得到$f(X)=Y$, 则f是$X\to Y$的双射.

例6 设 $f(x)=\sqrt{x^2-1}, g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求

$f[g(x)]$及$g[f(x)]$

$\because f(x)$的定义域$D_1=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,

$g(x)$的定义域$D_2=[-1,1]$,

$g(x)$的值域$w_2=[0,1]$, $\therefore D_1\cap w_2=\{1\}$

$\therefore f[g(x)]$的定义域$I=\{x\,|\,g(x)=1\}=\{0\}$

$\therefore f[g(x)]=0 \quad x\in\{0\}$

$g[f(x)]$是$g(u)$与$u=f(x)$的复合,

$\because f(x)$的值域$w_1=[0,+\infty)$,

$\therefore D_2\cap w_1=[0,1]$,

于是$g[f(x)]$的定义域

$J=\{x\,|\,f(x)\in[0,1]\}=\{x\,|\,0\le\sqrt{x^2-1}\le 1\}$

$=\{x\,|\,1\le|x|\le\sqrt{2}\}$

$\therefore g[f(x)]=\sqrt{1-(x^2-1)}=\sqrt{2-x^2} \quad 1\le|x|\le\sqrt{2}$

三、函数

1、函数概念

定义1 设数集$D\subset R$,则称映射$f: D\to R$为定义在D上的函数，记作 $y=f(x)$, $x\in D$

其中f是对应规则，D称为函数的定义域，x 叫做自变量，y就是函数(因变量).

全体函数值的集合称为值域:

$W=\{y|y=f(x)，x\in D\}$

例7 $y=\sin^{-1}(2+x^2)$

对于任何函数x，都没有按规定与之对应的y值

函数定义域不能是空集，所以此例不是函数关系.

例8 $x>y$

每一个x值有无穷多个y值与之对应

函数定义中对应规则要求每一个x值只有一个y值与之对应，所以此例也不是函数关系.

注：x(自变量)，y(函数)，f(对应规则)，D(定义域)，W(值域)这五个要素中, 定义域和对应规则是最重要的两个要素.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数是相同的。

注：1° 在定义1中, 对于每一个x, 只能有一个y与它对应, 这种函数称为单值函数；否则为多值函数.

多值函数是一个x值对应二个或二个以上的y值.

2° 函数的表示方法: 解析法（公式法），图象法和列表法

2024年中国矿业大学（北京）601高等数学考研复习提纲

《高等数学》考研复习提纲

高等数学复习重点提纲

课程编号：

课程性质：专业基础课

课程类别：必修课

先修课程：

学　　分：

总学时数：

周学时数：

开课单位：

一、课程简介

高等数学是理工科(非数学)本科专业学生的一门必修的重要基础理论课，它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量专门人才服务的。

通过本课程的学习，使学生会获得高等数学各方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获取数学知识奠定必要的数学基础；逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和自学能力，培养学生综合运用所学数学知识去分析问题和解决问题的能力。

二、培养目标

(一)知识培养目标

通过本课程的学习，要使学生获得：1、函数与极限；2、一元函数微积分学；3、微分方程；4、向量代数与空间解析几何；5、多元函数微积分学；6、无穷级数等方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获取数学知识奠定必要的数学基础。

(二)能力培养目标

引导学生在生活实践中使用数学，在其它课程中应用数学，增强运用数学方法、借助计算机来分析和解决实际问题的能力；形成积极应用数学的氛围，在教学活动中，渗透素质教育，使学生提高逻辑思维能力，注重培养严谨求实的科学态度，树立科学的世界观。

三 、课程内容（请细化到每一节的内容）

第一章 函数与极限

§1.1 映射与函数

【学时】：4

【了解】: 1.函数奇偶性、单调性、周期性、有界性。
2.反函数的概念。
3. 建立简单应用问题中的函数关系式的方法。
【掌握】: 1. 函数的概念，函数的表示方法。
2. 复合函数及分段函数的概念。
3. 基本初等函数的性质及其图形
【重点】: 1.复合函数及分段函数的概念。
2. 基本初等函数的性质及其图形。
【难点】: 分段函数的建立与性质

§1.2 数列极限

【学时】: 2
【了解】: 数列的极限与其子数列的极限之间的关系
【掌握】: 1.数列极限的概念，数列极限的性质。2. 子数列的概念
【重点】:数列极限的概念、性质
【难点】:数列极限的概念

§1.3 函数极限

【学时】: 2
【了解】:
【掌握】: 1. 函数极限的概念，函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系。
2. 函数极限的性质。
【重点】:函数极限的概念，函数极限的性质
【难点】: 左极限与右极限概念及应用

§1.4 无穷大与无穷小

【学时】: 2
【了解】:
【掌握】: 1.无穷大、无穷小的概念 2. 函数及其极限与无穷小的关系
【重点】: 无穷大、无穷小的概念
【难点】:无界与无穷大的关系

§1.5 极限运算法则

【学时】: 2
【了解】:
【掌握】: 1.无穷小的性质 2.极限的四则运算法则，复合函数的运算法则及换元法则
【重点】: 极限的四则运算法则和复合函数的运算法则
【难点】:

§1.6 极限存在准则 两个重要极限

【学时】：2
【了解】:利用两个准则求极限的方法
【掌握】：1.极限存在的夹逼准则和单调有界准则。2.利用两个重要极限求极限的方法。
【重点】：两个重要极限
【难点】：极限存在的两个准则的应用

§1.7 无穷小的比较

【学时】：1
【了解】：常见的等价无穷小
【掌握】：1. 无穷小的阶的概念。2. 无穷小的比较。3.利用等价无穷小求极限的方法。
【重点】：无穷小的比较
【难点】：

§1.8 函数的连续性与间断点

【学时】：2
【了解】：间断点的概念
【掌握】：1. 函数在一点连续和在一个区间上连续的概念。2. 会判别间断点的类型。
【重点】：函数连续性
【难点】：间断点及其分类

§1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性

【学时】：1
【了解】：连续函数的性质和初等函数的连续性
【掌握】：
【重点】：函数连续性及初等函数的连续性
【难点】：

§1.10 闭区间上连续函数的性质

【学时】：1
【了解】:闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）
【掌握】：
【重点】：区间上连续函数的性质
【难点】：闭区间上连续函数性质的应用

第二章 导数与微分

§2.1 导数的概念

【学时】：2
【了解】：导数的物理意义
【掌握】：1. 导数的概念、导数的几何意义及函数的可导性与连续性之间的关系。2. 会求平面曲线的切线方程和法线方程。3. 会求分段函数的导数。
【重点】：导数的概念
【难点】：分段函数的导数

§2.2 导数的求导法则

【学时】：2
【了解】：
【掌握】：1. 导数的四则运算法则、反函数和复合函数的求导法则。2. 基本初等函数的导数公式。
【重点】：1. 导数的四则运算法则、反函数和复合函数的求导法则。2. 基本初等函数的导数公式。
【难点】：反函数的导数

§2.3 高阶导数

【学时】：1
【了解】：高阶导数的概念
【掌握】：一些简单函数n阶导数的求法。
【重点】：高阶导数的概念
【难点】：

§2.4 隐函数和参数式所确定的函数的导数 相关变化率

【学时】：2
【了解】：相关变化率
【掌握】：会求隐函数和参数式所确定的函数的一阶、二阶导数
【重点】：隐函数和由参数方程确定的函数的导数
【难点】：隐函数和由参数方程确定的导数

§2.5 函数的微分

【学时】：2
【了解】：1.微分的四则运算法则和一阶微分形式不变性。2.微分的几何意义。
【掌握】：1.微分的概念，导数与微分的关系。2. 会求函数的微分

2024年中国矿业大学（北京）601高等数学考研核心题库

同济大学数学系《高等数学》考研核心题库之选择题精编

1. 设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则I，J，K的大小关系是__________.

A. I＜J＜K

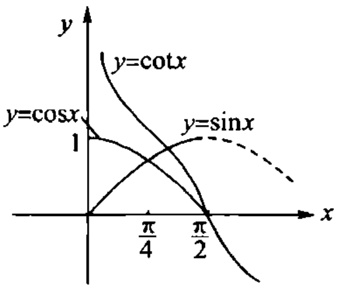
B. I＜K＜J

C. J＜I＜K

D. K＜J＜I

【答案】B

【解析】见下图.



图

当$0<x<\frac{\pi}{4}$时，

sinx＜cosx＜1＜cotx，

于是 lnsinx＜lncosx＜lncotx，

由定积分性质得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$$

即 I＜K＜J.

故应选 B.

2. 函数

$$f(x)=(x^2-x-2)\,|x^3-x|$$

不可导点的个数是__________

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

【答案】B

【解析】$f(x)=$

$$\begin{cases}-(x-2)x(x-1)(x+1)^2, & x\leqslant -1\\ (x-2)x(x-1)(x+1)^2, & -1<x\leqslant 0\\ -(x-2)x(x-1)(x+1)^2, & 0<x\leqslant 1\\ (x-2)x(x-1)(x+1)^2, & x>1\end{cases}$$

$f(x)$的不可导的可能点为
x=-1, x=0, x=1。

$f'_{-}(-1)$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{-(x-2)x(x-1)(x+1)^2}{x+1} = 0$$

$f'_{+}(-1)$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-2)x(x-1)(x+1)^2}{x+1} = 0$$

所以由 $f'_{-}(-1) = f'_{+}(-1)$得：
x=-1 为$f(x)$的可导点。
由
$f'_{-}(0)$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x-2)x(x-1)(x+1)^2}{x} = 2$$

$f'_{+}(0)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x-2)x(x-1)(x+1)^2}{x} = -2$$

$f'_{-}(1)$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-2)x(x-1)(x+1)^2}{x-1} = 4$$

$f'_{+}(1)$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-2)x(x-1)(x+1)^2}{x-1} = -4$$

因此$f(x)$的不可导点有两个：
x=0, x=1。
故应选 B

3. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2)dt, g(x) = x^3 + x^4$. 则当$x \to 0$时, f(x)是 g(x)的__________

A. 等价无穷小.
B. 同阶但非等阶无穷小.
C. 高阶无穷小.
D. 低阶无穷小.
【答案】B

【解析】由洛必达法则，$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin^2 x)\cdot \cos x}{3x^2+4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2+4x^3} = \frac{1}{3}$. 故选 B.

4. 设函数$f(u)$可导，$y = f(x^2)$当自变量 x 在 x=-1 处取得增量 Δx =-0.1 时，相应的函数增量Δy的线性主部为 0.1，则 $f'(1)$=__________

A. -1
B. 0.1
C. 1

D. 0.5

【答案】D

【解析】 $dy = f'(x^2)\cdot 2x dx$

即 $0.1 = f'(1)\cdot(-2)\cdot(-0.1)$

解得 $f'(1) = 0.5$

故应选 D

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx,\ (n=0,1,2,\cdots)$，则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于__________.

A. $\frac{1}{2}$,

B. $-\frac{1}{2}$,

C. $\frac{3}{4}$

D. $-\frac{3}{4}$

【答案】C

6. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$__________.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$

C. $2\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy.$

D. $2\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy.$

【答案】B

【解析】在极坐标系下该二重积分要分成两个积分区域

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta\right\},$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\middle|\, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\right\},$$

所以 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，故选 B.

7. 若级数 $\sum_{n=1}a_n$ 收敛，则级数__________.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

B. $\sum\limits_{n=1}(-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1} a_n a_{n+1}$ 收敛

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

【答案】D

【解析】因为已知 $\sum\limits_{n=1} a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1} \dfrac{a_n}{2}$ 和 $\sum\limits_{n=1} \dfrac{a_{n+1}}{2}$ 都收敛，由收敛级数的性质知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

故应选 D.

8. $f(x)$为奇函数，当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0, f''(x)>0$，那么当$x\in(-\infty$，时是__________.

A. $f'(x)>0, f''(x)>0$;

B. $f'(x)>0, f''(x)<0$;

C. $f'(x)<0, f''(x)<0$;

D. $f'(x)<0, f''(x)>0$.

【答案】B

【解析】①由 $f(x)$为奇$\Rightarrow f'(x)$为偶. $f''(x)$为奇$\Rightarrow x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0, f''(x)<0$，选 B.

②取值法，令 $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2, f''(x)=6x$，故选 B.

9. 微分方程

$$y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$$

的特解形式可设为__________.

A. $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$

B. $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$

C. $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$

D. $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$

【答案】A

【解析】微分方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$，

特征根为 $r = \pm i$.

$y'' + y = x^2 + 1$ 的特解形式为

$y_1^* = ax^2 + bx + c$

$y'' + y = \sin x$ 的特解形式为

$y_2^* = x(A\sin x + B\cos x)$

故所求微分方程的特解形式为

$y^* = y_1^* + y_2^*$

$\quad = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$

故应选 A.

10. 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x}{x} dx$，$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{\tan x} dx$，则__________.

A. $I_1 > I_2 > 1$

B. $1 > I_1 > I_2$

2024年中国矿业大学（北京）601 高等数学之考研题库[仿真+强化+冲刺]

2024年中国矿业大学（北京）601 高等数学考研仿真五套模拟题

2024年高等数学五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、选择题

1. 设可微函数 f(x, y)在点(x_0,y_0)取得极小值，则下列结论正确的是__________.

A. $f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数大于零

B. $f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数等于零

C. $f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数小于零

D. $f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数不存在

【答案】B

由可微函数极值存在的必要条件知，

$$f'_x(x_0,y_0)=0，f'_y(x_0,y_0)=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,y_0)]\Big|_{x=x_0}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f(x_0,y)]\Big|_{y=y_0}=0$$

故应选 B.

2. 设在闭区间[a, b]上$f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$、令

$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,S_2=f(b)(b-a).\ S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a).$ 则__________

A. $S_1<S_2<S_3$.

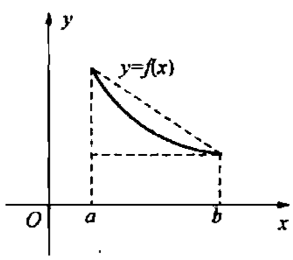
B. $S_2<S_1<S_3$.

C. $S_3<S_1<S_2$.

D. $S_2<S_3<S_1$.

【答案】B

使用图解法.



图

f(x)>0表示曲线在x轴上方. $f'(x)<0$表示曲线连续、光滑且严格单调下降. $f''(0)>0$表示曲线为凹. 如上图所示. S_1是曲边梯形面积，S_2是矩形面积，S_3是梯形面积. 于是看出$S_2<S_1<S_3$. 故选 B.

3. 曲线 $r = 2a\cos\theta$ 所围成图形面积为__________.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 d\theta$;

B. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 d\theta$;

C. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 d\theta$;

D. $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 d\theta$.

【答案】D

4. 设函数 f(x，y)在点(0，0)附近有定义，且 $f'_x(0,0) = 3, f'_y(0,0) = 1$，则__________

A. $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy$

B. 曲面 z=f(x，y)在点(0，0，f(0，0))的法向量为{3.1，1}

C. 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点(0，0，f(0，0))的切向量为 $\{1,0,3\}$

D. 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点(0，0，f(0.0))的切向量为{3，0，1}

【答案】C

对于选项 C，xOz 面上曲线 z=f(x，0)在点(0，0，f(0，0))处导数

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(0,0)} = f'_x(0,0) = 3,$$

且 xOz 面上的向量在 y 轴上的分量为零，故切线的方向向量为 $\{1,0,3\}$.

故应选 C.

5. 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为__________

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{4}{3}\pi$.

C. $\frac{2}{3}\pi^2$

D. $\frac{2}{3}\pi$.

【答案】B

$V = \pi\int_0^{\pi} (\sin^{\frac{3}{2}} x)^2 dx = -\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x) d\cos x = \frac{4}{3}\pi$. 故选 B.

6. 设 f(x)，g(x)在区间[a，b]上连续，且 g(x)<f(x)<m(m 为常数)，则曲线 y=g(x)，y=f(x)，x=a 及 x=b 所围平面图形绕直线 y=m 旋转而成的旋转体体积为__________

A. $\int_a^b \pi[2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

B. $\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

C. $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

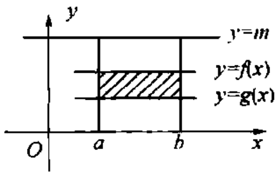
D. $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

【答案】B

所围的平面图形如下图斜线部分所示，体积

$$V=\int_a^b \pi[(m-g(x))^2-(m-f(x))^2]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$ 故选 B.



图

7. 函数 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是__________

A. $y''-y'-2y=3xe^x$

B. $y''-y'-2y=3e^x$

C. $y''+y'-2y=3xe^x$

D. $y''+y'-2y=3e^x$.

【答案】D

因为特征根为 1 和-2，故特征方程为$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$，所以齐次方程是$y''+y'-2y=0$，把xe^x代入得 D 为正确答案.

8. 曲线 y=x(x-1)(2-x)与 x 轴所围成图形的面积可表示为__________

A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

C. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

【答案】C

曲线 y=x(x-1)(2-x)与 x 轴有三个交点，其横坐标依次为 x=0，1，2，且当 0<x<1 时，y<0，当 1<x<2 时，y>0. 故选 C.

二、填空题

9. 已知一球面过 3 个点$M_1(3,1,-3)$,$M_2(-2,4,1)$,$M_3(-5,0,0)$且球心在平面 2x+y-z+3=0 上，则球面方程为__________。

【答案】$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$

10. 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$单位向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$__________

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$

由单位向量 n 知，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故应填$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. 设数量场$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 div（gradu）=__________.

【答案】$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)=\operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)=\frac{-x^2+y^2+z^2+x^2-y^2+z^2+x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$__________.

【答案】$-\frac{1}{4}$

$$原式\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

附赠重点名校：高等数学 2016-2022 年考研真题汇编（暂无答案）

第一篇、2022 年高等数学考研真题汇编

2022 年西南科技大学 601 高等数学考研专业课真题

2022 年硕士研究生招生考试（初试）试题

科目代码：601 科目名称：高等数学

说明：1.本试题为招生单位自命题科目。
2.所有答案必须写在答题纸上，写在本试题单上的一律无效。
3.考生答题时不必抄题，但必须写明题号。
4.本试题共计五大题，满分 150 分。

【本试题共计 2 页，此为第 1 页】

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x^2}\right)^{\frac{x^3}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）。

A、连续 B、有可去间断点 C、有跳跃间断点 D、有无穷间断点

2. 设 $y=f(x)$ 是 $y''-y'+2y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0（ ）。

A. 取得极大值 B、取得极小值 C、某邻域内单调增加 D. 某邻域内单调减少

3. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（ ）。

A、$x-y+z=-2$ B、$x+y+z=0$ C、$x-2y+z=-3$ D、$x-y-z=0$

4. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（ ）。

A、发散 B、绝对收敛 C、条件收敛 D、敛散性与 k 有关

5. 函数 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是（ ）。

A、$y''-3y'+2y=xe^x$ B、$y''-3y'+2y=e^x$ C、$y''-3y'+2y=-xe^x$ D、$y''-3y'+2y=-e^x$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $|\vec{a}|=\sqrt{13}, |\vec{b}|=\sqrt{19}, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{24}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$______。

2. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=16$ 的内侧，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$______。

3. 微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3e^x$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解为______。

4. 设函数 $y(x)$ 为由方程 $x^3+\int_0^y(1+\cos t^2)dt=2$ 所确定的隐函数，则 $dy=$______。

考试科目代码：601　　考试科目名称：高等数学

5. 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)$ 的拐点个数为________个。

三、计算题（每小题 10 分，共 80 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}t^2\left(e^{t^2}-1\right)dt}{(1-\cos x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$。

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y-xe^{y-1}=8$ 所确定，求 $y''(0)$。

3. 求不定积分 $\int e^x\operatorname{arc}\cot e^x dx$。

4. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=(x^2-1)dx+(y^2-1)dy$，求函数 $z=f(x,y)$ 的极值点，并指明极大、极小值点。

5.计算二重积分 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|dxdy$ ，其中 D 为 $x^2+y^2\le9$。

6. 求 $I=\int_L[e^x\sin y-2(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$，$L$ 为从点 $A(2,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧。

7.已知 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$ 的表达式。

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^{n-1}$ 的收敛域与和函数。

四、应用题（10 分）

设曲线 $y=2\sqrt{x-1}$，过原点作曲线的切线，求：(1) 此切线方程；(2) 曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形的面积以及其绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V_x。

五、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=\dfrac{1+2\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+2|x|\int_{-1}^{1}f(x)dx$，证明：$\int_{-1}^{1}f(x)dx=-\pi$。

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=1,f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

试证：任意 $t\in(0,1)$ $\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=t$。

2022年湖南师范大学602高等数学考研专业课真题

湖南师范大学2022年硕士研究生招生考试初试
自命题科目试题册

业务课代码：602
业务课名称：高等数学
满分：150分　　　　　　考试时间：3小时

考生须知：1、答案必须写在答题纸上，写在其它纸上无效。
2、答题时必须使用蓝、黑色墨水笔作答，用其他笔答题不给分。不得使用涂改液。

一、计算题（每题15分，必须选做90分。自然地理学方向考生选做（1）-（6）题，地图学与地理信息系统方向考生选做（1）-（5）和（7）题）

（1）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a 的值

（2）函数 $y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定，且 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\dfrac{dz}{dx}$

（3）计算 $\int_{-2}^{2}\dfrac{x^2+x\ln(x^4+1)}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

（4）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n\ln(n+1)}x^n$ 的收敛域

（5）已知 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x\ (0<x<1)$，求 $f(x)$

（6）解微分方程 $\begin{cases}(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0\\ y(0)=-1\end{cases}$

（7）当参数 a 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+ax_2-x_3=1\\ ax_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解、有唯一解或有无穷多解？当它有无穷多解时，求出它的通解（用它的一个特解和导出组的基础解系来表示）。

二、应用题（每题15分，必须选做30分。自然地理学方向考生选做（8）和（9）题，地图学与地理信息系统方向考生选做（8）和（10）题）

（8）作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出最小体积。

（9）在曲线 $y=x^2-12$ 上求一点 $P(x,y)\ (x>0,y>0)$，使过该点的切线与曲线及两坐标

轴所围图形的面积最小，并求出最小面积。

（10）设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，1，−2，对应的特征向量依次为

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$，求矩阵 A。

三、证明题（每题 15 分，必须选做 30 分。自然地理学方向考生选做（11）和（12）题，地图学与地理信息系统方向考生选做（11）和（13）题）

（11）证明：$\arctan x+\operatorname{arccot}x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

（12）证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处可微。

（13）设 η^* 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}x=b$ 的一个解，ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_{n-r} 是对应的齐次线性方程组的一个基础解析，证明 η^*，ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_{n-r} 线性无关。