全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年中国矿业大学

（北京）602数学分析考研精品资料

策划：辅导资料编写组

真题汇编 直击考点

考研笔记 突破难点

核心题库 强化训练

模拟试题 查漏补缺

高分学长学姐推荐

【初试】2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清PDF电子版支持打印，考研首选资料。

一、中国矿业大学（北京）602数学分析考研真题汇编及考研大纲

1. 中国矿业大学（北京）602数学分析2005-2011年考研真题，暂无答案。

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

2. 中国矿业大学（北京）602数学分析考研大纲

①2021年中国矿业大学（北京）602数学分析考研大纲。

②2023年中国矿业大学（北京）602数学分析考研大纲。

说明：考研大纲给出了考试范围及考试内容，是考研出题的重要依据，同时也是分清重难点进行针对性复习的首选资料，本项为免费提供。

二、2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研资料

3. 《数学分析》考研相关资料

（1）《数学分析》[笔记+提纲]

①中国矿业大学（北京）602数学分析之《数学分析》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（北京）602数学分析之《数学分析》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《数学分析》考研核心题库（含答案）

①中国矿业大学（北京）602数学分析考研核心题库之计算题精编。

②中国矿业大学（北京）602数学分析考研核心题库之证明题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习首选资料。

（3）《数学分析》考研模拟题[仿真+强化+冲刺]

①2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习首选。

③2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺首选资料。

三、电子版资料全国统一零售价

4. 本套考研资料包含以上一、二部分（高清PDF电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5．中国矿业大学（北京）602数学分析考研初试参考书

华东师范大学数学系编著《数学分析》上下册（第三版，高等教育出版社出版，2006年5月）

五、本套考研资料适用学院和专业及考试题型

理学院：数学/人工智能/统计学

填空题（选择题）、计算题、证明题及综合题

目录

2024年中国矿业大学（北京）602数学分析备考信息

中国矿业大学（北京）602数学分析考研初试参考书目

华东师范大学数学系编著《数学分析》上下册（第三版，高等教育出版社出版，2006年5月）

中国矿业大学（北京）602数学分析考研招生适用院系及考试题型

理学院：数学/人工智能/统计学

填空题（选择题）、计算题、证明题及综合题

中国矿业大学（北京）602 数学分析历年真题汇编

中国矿业大学（北京）602 数学分析 2005 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学（北京校区）

二〇〇五年硕士研究生入学试题

科目名称：数学分析　　　　共 2 页　第 1 页

一、填空题（40 分，每小题 4 分，答案写在答题纸上）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=$______；

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$ 的正面ε-δ描述为______；

3. 已知 f 为(−∞,+∞)上连续函数，$y=\int_{e^{\sin x}}^{2x}f(t^2)dt$, 则 y′ =______；

4. f(P)在平面点集 D 上一致连续，其定义为：______；

5. 设正值函数 f 在(a,b)内任何闭区间上都可积，且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$,

当 p 与λ满足何种条件：______时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

6. 设 $u=x^{yz}$,则 du=______；

7. 改变积分次序，$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy=$______；

8. 含参量非正常积分 $\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在[a,b]上不一致收敛的定义是：______；

9. 设 $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ 在[1,+∞]上一致收敛于______(n→∞)；

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的一致收敛域是______。

二、计算题（40 分，每小题 8 分；要求有计算过程）

1. 求极限: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}$;

2. 计算不定积分: $\int\dfrac{dx}{x^4(1+x^2)}$;

3. 求曲线 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1(a>0,b>0)$ 的全长;

4. 求四个曲面:$z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $y=x$, $y=x^2$ 所围成的立体的体积;

5. 计算第二型曲线积分：$\int_C ydx-xdy+(x^2+y^2)dz$, 曲线 C 为 $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=at$ 从(1,1,0)到(e,e^{-1},a)。

$x^2(x-x^2)$

中国矿业大学（北京校区）

二〇〇五年硕士研究生入学试题

科目名称：数学分析

共 2 页 第2 页

三（20 分）（1）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在|x|<R 时收敛，若 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，证明：$\int_0^R f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$；

（2）利用（1）的结果证明：$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$。

四（10 分）若 f(x)在[a,b]上有二阶导数，f′(a)=f′(b)=0,证明：存在ξ∈（a,b）使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

五（10 分）验证函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$（a,b 为常数）满足方程：$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$。

六（10 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为已知的 n 个正数，求

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$ 在限制条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leq 1$ 下的最大值。

七（10 分）应用高斯公式计算三重积分 $\iiint_V(xy+yz+zx)dxdydz$，其中 V 是由 x≥0,y≥0,0≤z≤1 与 $x^2+y^2\leq 1$ 所确定的空间区域。

八（10 分）证明：若 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$，S 为包围区域 V 的外侧，则

$$\iiint_V\Delta u\,dxdydz=\oiint_S\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

其中 u 在区域 V 及其边界面 S 上有二阶连续导数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的方向导数。

中国矿业大学（北京）602 数学分析 2006 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学（北京）

二〇〇六年硕士研究生入学试题

科目名称：数学分析　　　　共 2 页　第 1 页

一、填空 (本题共 40 分，每小题 4 分)　(答案必须写在答题纸上)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]\right\}=$ ________.

3. 函数 $y=\ln x$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}=$ ________.

4. 当 ________ 时，非正常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 收敛.

5. 函数 $\sin x$ 的马克劳林 (Maclaurin) 级数为

________.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)\,dt$, 则 $F''(x)=$ ________.

7. 设 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的交线，则过 L 上点 $P(3,4,5)$ 的 L 的切线方程为 ________.

8. 设 $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy$, 则导数 $F'(x)=$ ________.

9. 交换累次积分次序 $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy=$ ________.

10. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周，则第一型曲线积分 $\int_L x^2\,ds=$ ________.

二、计算题 (本题共 35 分，每小题 7 分；要有计算过程)

1. 利用定积分概念求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$.

2. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆，求这个椭圆到坐标原点的最长距离与最短距离.

3. 确定幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 收敛域，并求其和函数.

中国矿业大学（北京）

二〇〇六年硕士研究生入学试题

科目名称：数学分析　　共 2 页　第 2 页

4. 求由抛物线 $y^2 = mx$, $y^2 = nx$ 和直线 $y = \alpha x$, $y = \beta x$ 所围成的平面区域的面积 $(0 < m < n;\quad 0 < \alpha < \beta)$.

5. 讨论非正常积分 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \quad (p > 0)$ 的收敛性与绝对收敛性.

三. (20 分) 已知 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

1. 用 $\epsilon - \delta$ 定义证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.
2. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的偏导数存在但偏导函数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.
3. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

四. (10 分) 求 $f(x) = |\sin x|$ 的 Fourier 展开式，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ 的和.

五. (10 分) 计算第二型曲线积分

$$I = \int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2},$$

其中 C 是从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一条不经过坐标原点的光滑曲线，它的方程是

$$y = f(x);\ -1 \le x \le 1.$$

六. (10 分) 求曲面积分

$$\iint_S yz\,dx\,dy + zx\,dy\,dz + xy\,dz\,dx$$

的值，其中 S 是由柱面 $x^2+y^2=1$, 旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 及三个坐标面围成的立体在第一卦限内的部分的外侧面.

七. (10 分) 叙述实数完备性理论中的致密性定理，并用它证明连续函数的一致连续性定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

八. (15 分) 计算

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx - \sin ax}{x}\,dx \quad (p > 0,\ b > a)$$

的值，并由此计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

中国矿业大学（北京）602 数学分析考研大纲

2023 年中国矿业大学（北京）602 数学分析考研大纲

《数学分析》考试大纲

学院（盖章）：　　　　　　　　　　负责人（签字）：

专业代码：070101、070102、070103、070104
专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计 、应用数学
考试科目代码： 602　　　　　　　　　考试科目名称：数学分析

本《数学分析》考试大纲适应于中国矿业大学（北京）理学院数学各专业硕士研究生入学考试。《数学分析》不仅是大学本科阶段数学各专业重要的基础课程，而且也是数学各专业研究生阶段许多课程的基础。这些课程从本质上来说是数学分析延伸、深化或应用，数学分析的基本概念、思想与方法，更是无处不在的。考生必须真正学好该门课的知识，为学习其他专业课程打下坚实的基础。

（一）考试的总体要求

要求考生比较系统的理解数学分析的基本概念和基本理论，掌握研究分析领域的基本方法，基本上掌握数学分析的思想和论证方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、具备较熟练的演算技能和初步的应用能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

(二) 考试内容

试题以华东师范大学数学系编著《数学分析》上下册（第三版，高等教育出版社出版，2006 年 5 月）为蓝本，内容涵盖该教材的第一至二十二章（教材中打*号不作要求）。内容涉及分析基础、一元函数微积分、一元积分学、级数、多元微分学、多元积分学理论，兼顾实数完备性理论方面的内容。试题重点考查的内容：

一、　分析基础

1. 实数概念、确界
2. 函数概念
3. 序列极限与函数极限
4. 无穷大与无穷小
5. 连续概念与基本性质，一致连续性
6. 实数完备性定理

二、　一元微分学

1. 导数概念与几何意义
2. 求导公式求导法则
3. 高阶导数
4. 微分
5. 微分中值定理
6. L’Hospital 法则
7. Taylor 公式
8. 应用导数研究函数

三、　一元积分学

1. 不定积分法与可积函数类
2. 定积分的概念、性质与计算
3. 定积分的应用
4. 反常积分

四、 级数
1. 数项级数的敛散判别与性质
2. 函数项级数与一致收敛性
3. 幂级数
4. Fourier 级数

五、 多元微分学
1、 欧式空间
2、 多元函数的极限
3、 多元连续函数
4、 偏导数与微分
5、 隐函数定理
6、 Taylor 公式
7、 多元微分学的几何应用
8、 多元函数的极限

六、 多元积分学
1、 重积分的概念与性质
2、 重积分的计算
3、 二重、三重积分
4、 含参变量的正常积分和反常积分
5、 曲面积分与 Green 公式
6、 曲面积分
7、 Gauss 公式、Stokes 公式、线积分与路径无关

(三)、考试要求
一、分析基础
1、了解实数的基本性质，理解有界、无界及上下确界的意义。掌握绝对值不等式及平均值不等式。
2、熟练掌握函数概念（如定义域、值域、反函数等）。
3、掌握序列极限的意义、数学语言的陈述及性质（特别，单调序列的极限存在性定理）和运算法则，熟练掌握求序列极限的ε-N 方法。
4、掌握函数极限的意义、数学语言的陈述及性质和运算法则（自变量趋于有限数和趋于无限两种情形），熟练掌握求函数极限的ε-δ方法，了解广义极限和单侧极限的意义。
5、熟练掌握求序列极限和函数极限的常用方法（如初等变形、变量代换、两边夹法则等），掌握由递推公式给出的序列求极限的基本技巧。
6、理解无穷大量与无穷小量，同阶和高（低）阶无穷大（小）量的意义，特别是等价无穷小量的意义。
7、熟练掌握函数在一点及在一个区域上连续的概念、理解函数两类间断点的意义，掌握

初等函数的连续性，理解介值定理，一致连续和不一致连续的概念。
8、掌握序列收敛的充分必要条件及函数极限（当自变量趋于有限数及区域无穷两种情形）存在的充分必要条件。
9、掌握涉及实数完备性定理的叙述以及相互之间的证明、有界闭区间上的连续函数的性质。

二、一元微分学
1、掌握导数的概念和几何意义，了解单侧导数的意义，依据定义求函数在给定点的导数。
2、应用求导公式和法则熟练计算函数导数（包括用参数式给出时的导数）、隐函数的导数以及函数的高阶导数。
3、理解函数微分的概念和函数可微的充分必要条件，了解一阶微分的不变性，能运用微分做近似计算。
4、理解并掌握微分中值定理（Rolle 定理，Lagrange 定理和 Cauchy 中值定理），并能应用它们解决函数零点存在及不等式证明等问题。
5、熟练掌握应用 L'Hospital 法则求函数极限的方法。
6、理解 Taylor 公式（Lagrange 余项和 Peano 余项）的意义，并熟记五个基本公式（$e^x,\sin x,\cos x,(1+x)^\alpha,\ln(1+x)$），能将给定函数在指定 $x=0$ 点展成 Taylor 级数，掌握应用 Taylor 公式解决不等式证明、求函数极限等问题的基本技巧。
7、熟练掌握应用导数判断函数升降、凹凸性以及画出函数图像的方法，以及求一元函数极值和最值的方法。

三、一元积分学
1、理解不定积分的概念和基本性质，熟记基本积分表，理解并掌握换元法和分部积分法的意义和方法，了解并应用它们熟练计算不复杂的不定积分。
2、灵活运用积分方法求不定积分，熟练掌握有理函数、三角函数有理式及简单的简单的根式的有理式的积分方法。
3、理解定积分的概念，掌握定积分的基本性质及函数在有限区间上可积的充分必要条件，熟练掌握定积分的计算方法，了解变限定积分的性质，掌握积分中值定理。
4、熟练应用定积分计算平面曲线的弧长、平面图形的面积、立体体积、旋转曲面表面积，并应用于求均匀平面图形重心坐标等简单物理、力学问题。
5 理解反常积分及收敛、绝对收敛和发散的意义，掌握反常积分的收敛的判别法则。

四、级数
1、掌握数项级数收敛、发散和绝对收敛的概念、级数收敛的充分必要条件，收敛和绝对收敛的性质以及级数加法和乘法的运算法则。
2、熟练掌握正项级数敛散判别法（比如判别法、D'Alembert 判别法、Cauchy 根式判别法以及 Cauchy 积分判别法），掌握一般项级数敛散判别法。能计算一些特殊数项级数的和。
3、理解函数项级数收敛的意义并能够确定其收敛域。理解函数序列收敛以及函数项级数一致收敛的意义，掌握函数项级数一致收敛判别法则。
4、理解幂级数的概念并能够确定其收敛半径，掌握幂级数的基本性质和运算法则，熟记五个基本幂级数展开式（$e^x,\sin x,\cos x,(1+x)^\alpha,\ln(1+x)$），能够求出给定函数在制定点

的幂级数展开式及应用幂级数运算求一些级数的和。
5、理解函数 Fourier 展开式的意义，掌握 Fourier 展开式的基本方法。了解 Fourier 级数的收敛性定理。逐项积分和逐项求导定理以及 Parseval 等式，并能应用 Fourier 级数求某些级数的和（如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$）。

五、多元微分学
1、理解欧式空间中的概念及欧式空间的内积与模、开集、开区域与闭区域的意义，了解完备性定理及紧性定理。
2、理解多元函数的概念，掌握多元函数的重极限、累次极限和特殊路径极限的意义，并能够根据定义计算多元函数极限，或证明二元极限不存在，能计算多元函数的重极限和累次极限。
3、理解多元连续函数的概念及其性质。并能够判断多元函数的连续性，了解多元函数的一致连续性。
4、理解偏导数的概念，掌握其计算法则，能够熟练计算多元函数的偏导数和复合函数的导函数，能计算给定函数在给定方向上的导函数。
5、理解多元函数的微分的概念，并能够判断函数的可微性。
6、理解隐函数存在定理和反函数存在定理，熟练掌握隐函数的微分法。
7、理解 Taylor 公式的意义，并能够求出二元函数的具有指定阶数的 Taylor 公式。
8、能应用偏导数求空间的切线、法平面及空间曲面的法线和切平面的方程。
9、理解多元函数的极限和最值的意义，极值的充分必要条件，掌握求多元函数极值、条件极值及在闭区域上的最值的方法，并用于解决实际问题。

六、多元积分学
1、理解重积分的概念、可积的充分必要条件及重积分的性质。
2、掌握二重积分和三重积分化累次积分的方法以及二重、三重积分的变量代换方法，平面极坐标变换，空间柱坐标变化和球坐标变化），能熟练计算二重和三重积分，并用于计算平面图形的面积、柱体体积、曲面面积及曲面所围成的立体体积。
3、了解含参变量正常积分的基本性质（连续性，积分号下取极限，求导和求积分），了解含参变量的反常积分一致收敛判别法，会计算 B 和 Γ 函数。
4、理解第一型和第二型曲线积分的意义、性质，能熟练计算曲线积分。
5、理解并掌握 Green 公式的意义，并能应用它计算曲线积分。
6、理解第一型和第二型曲面积分的意义、性质，能熟练计算曲线积分。
7、理解并掌握 Gauss 公式和 stolz 公式的意义，能够用于曲面积分或曲线积分的计算，了解空间曲线积分与路径无关的充分必要条件极其对曲线积分计算的应用。

（四）、考试基本题型
基本题型可能有：填空题（选择题）、计算题、证明题及综合题等。

2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研核心笔记

《数学分析》考研核心笔记

第1章　实数集与函数

考研提纲及考试要求

考点：实数及其性质：
考点：实数的一些主要性质
考点：绝对值与不等式
考点：几个重要不等式
考点：有界数集确界原理

考研核心笔记

【核心笔记】实数

1. 实数及其性质

回顾中学中关于有理数和无理数的定义.

有理数：$\begin{cases} \text{能用互质的分数}\dfrac{p}{q}(p,q\text{为非负整数，且}q\neq 0)\text{表示的数} \\ \text{有限十进小数或无限十进循环小数表示的数} \end{cases}$

若规定：

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$$

则有限十进小数都能表示成无限循环小数。

当$x=a_0$为整数时，则记为$x=(a_0-1).9999\cdots$

（1）实数大小的比较

定义1：给定两个非负实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

其中a_k b_k为非负整数，$0\le a_k$ ，$b_k\le 9$若由

①$a_k=b_k$，$k=0,1,2,\cdots$则称x与y相等，记为$x=y$

②若存在非负整数l，使得 $a_k=b_k$，$(k=0,1,2,\cdots,l)$，而$a_{l+1}>b_{l+1}$，则称x大于y（或y小于x），分别记为$x>y$（或$y<x$）。

规定任何非负实数大于任何负实数；对于负实数x,y，若按定义1有$-x>-y$，则称$y>x$

（2）实数的有理数近似表示

定义 2：设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数，称有理数 $x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似值，而有理数称为 x 的 n 位过剩近似值，$n = 0,1,2,\cdots$ 对于负实数

$$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

x 的 n 位不足近似值规定为：

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n};$$

x 的 n 位过剩近似值规定为：

$$\bar{x}_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

比如 $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ 则

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的不足近似值；

1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值。

命题设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$， $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$x > y \iff$ 存在非负整数 n，使得 $x_n > \bar{y}_n$

2. 实数的一些主要性质

（1）四则运算封闭性：

（2）有序性：即 $a > b \quad a < b \quad a = b$，必有一个成立。

（3）传递性：即 $a > b \ ,b > c \ \Rightarrow a > c$

（4）阿基米德性：即 $\forall a,b \in \mathbf{R},\ b > a > 0,\ \exists n \in \mathbf{N},\ \ni\ na > b.$

（5）稠密性：有理数和无理数是稠密性的。

（6）实数集的几何表示———数轴：例如：

$$a = b,\ \iff\ \forall \varepsilon > 0,\ |a-b| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ a < b+\varepsilon\ \Rightarrow\ a \le b$$

3. 绝对值与不等式

绝对值定义：$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

从数轴上看：绝对值就是到原点的距离：

4. 几个重要不等式

（1） $a^2+b^2\ge 2|ab|$, $|\sin x|\le 1$. $|\sin x|\le|x|$

（2）对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,$$ （算术平均值）

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},$$ （几何平均值）

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.$$ （调和平均值）

$$H(a_i)\le G(a_i)\le M(a_i),$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

（3）伯努利不等式

这是由于对 $\forall\ x>0$ 由二项展开式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n,$$

因此有: $(1+x)^n$ 大于上式右端任何一项.

【核心笔记】数集确界原理

1. 区间与邻域

（1）区间：

$\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)

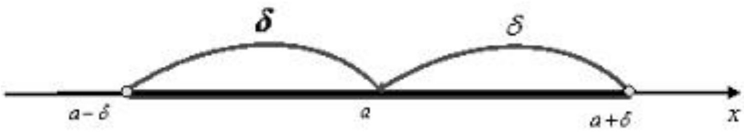
$\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$

半开区间：$\{x|a\le x<b\}$ 称为半开半闭，记为 $[a,b)$

$\{x|a<x\le b\}$ 称为半开半闭，记为 $(a,b]$

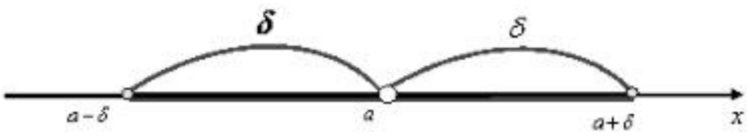
$[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 为无限区间。

（2）邻域 $U_\delta(a)=\{x\,\|x-a|<\delta\}$ 其中 $\delta>0,\ a\in R$ 称为 a 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(a)$



而点集 $U_\delta^0(a)$ 为点 a 的去心 δ 邻域，

即 $U_\delta^0(a)=\{x|a-\delta<x<a\}\cup\{x|a<x<a+\delta\}$



2. 有界数集确界原理

（1）有界数集:

定义(上、下有界,有界)

定义 1：设 S 为 R 中的一个数集。若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x \in S$，都有 $x \le M(x \ge L)$，则称 S 为有上界（下界）的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界 S（下界）。若数集 S 既有上界又有下界，则 S 为有界集，若 S 不是有界.则称 S 为无界集。

例如，闭区间、(a,b)(a、b 为有限数）、邻域等都是有界数集，集合 $E=\{y \mid y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)\}$ 也是有界数集.

（2）无界数集:对任意 $M>0$，存在 $\overline{x}\in S, |\overline{x}|>M$，则称 S 为无界集。$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 等都是无界数集,例证明集合是无界数集

（3）上下确界

先给出确界的直观定义：若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，其中最小的一个上界我们称它为数集 S 的上确界；同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界。

精确定义

定义 2：设 S 是 R 中的一个数集，若数 η 满足一下两条：

①对一切 $x\in S$ 有 $x\le\eta$．即 η 是数集 S 的上界；

②对任何 $\alpha<\eta$ 存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0>\alpha$（即 η 是 S 的最小上界）

则称数 η 为数集 S 的上确界。记作 $\eta=\sup S$

定义 3：设 S 是 R 中的一个数集，若数 ξ 满足以下两条：

对一切 $x\in S$ 有 $x\ge\xi$．即 ξ 是数集 S 的下界；

对任何 $\beta>\xi$ 存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0<\beta$（即 ξ 是 S 的最大下界）

则称数 ξ 为数集 S 的下确界。记作 $\xi=\inf S$

定理 1.1(确界原理).设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。

数集与确界的关系:确界不一定属于原集合。

（4）确界与最值的关系:设 E 为数集.

①E 的最值必属于 E,但确界未必,确界是一种临界点.

②非空有界数集必有确界(见下面的确界原理),但未必有最值.

③若 $\max E$ 存在,必有 $\max E=\sup E.$

对下确界也有类似的结论.

【核心笔记】函数概念

1. 函数的定义

函数的几点说明.

函数的两要素:定义域和对应法则

约定:定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研复习提纲

《数学分析》考研复习提纲

数学分析（Ⅰ）

一、 函数

实数概述，绝对值与不等式。

区间与邻域，确界原理。

函数概念，函数的几种表示法，函数的四则运算，复合函数，反函数，基本初等函数，初等函数。

具有某些特性的函数。

二、 数列极限

数列，数列极限的ε-N定义。

收敛数列的性质：唯一性、有界性、保序（号）性、迫敛性、四则运算法则。

数列极限存在的条件。

三、 函数极限（

函数极限的ε-M定义和ε-δ定义，单侧极限。

函数极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性、不等式性质、迫敛性、四则运算。

函数极限存在的条件：归结原则和柯西准则。

两个重要极限。

无穷小量及其阶的比较；记号 O，o，～；无穷大量及其阶的比较。

四、 函数的连续性

连续性概念，间断点及其分类，在区间上连续的函数。

连续函数的性质：局部有界性、局部保号性、四则运算、复合运算，闭区间上连续函数的性质，反函数的连续性，一致连续性。

初等函数的连续性。

五、导数与微分

导数概念：导数的定义（导数、左导数、右导数以及与连续性间关系）。导数几何意义、物理意义。导函数的概念。

求导法则：导数的四则运算。反函数的导数。复合函数的导数。基本求导法则与公式。

微分：微分概念。微分的运算法则（一阶微分形式的不变性）。

近似计算与误差估计。

高阶导数及运算（注意：莱布尼兹公式）。高阶微分。

参量方程所确定的函数的导数。

六、微分学基本定理与不定式极限

中值定理：费马（**Fermat**）定理——予备定理。中值定理（**Rolle**、**Lagrange**、**Cauchy** 三大中值定理）。导数极限定理。

不定式极限：$\frac{0}{0}$型不定式极限。$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限。其它类型的不定式极限（$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}$等类型）

泰勒定理。带皮亚诺（**Peano**）型余项的泰勒公式。应用（近似计算，求极限）。

七、运用导数研究函数的性质

函数的单调性。极值的必要条件。极值的两个充分条件（第三个充分条件可作选讲内容）。最大值与最小值。

函数的凸性与拐点的概念。函数凸性的判定。函数凸性的应用。

渐近线。函数作图。

方程近似解。

八、实数的一些基本定理

确界与确界存在定理。区间套定理。柯西收敛准则。致密性定理。聚点定理。有限复盖定理。

关于闭区间上连续函数性质的几个定理的严格证明。

九、不定积分

原函数与不定积分概念。基本积分表。线性运算法则。换元积分法。分部积分法。

有理函数积分法。三角函数有理式的积分.几种无理函数的积分。

十、定积分

曲边梯形面积与变力作功——引出定积分概念。定积分定义。定积分的几何意义。可积的必要条件。（达布）上和、下和及其性质。可积的充要条件。

可积的充分条件——可积函数类（闭区间上的连续函数，有有限个间断点的有界函数，单调有界函数）。

定积分的性质：线性运算性质，对区间的可加性、单调性、绝对可积性、积分（第一）中值定理。积分第二中值定理。

微积分学基本定理（原函数存在定理）。**Newton-Leibniz** 公式。定积分的换元法。定积分的分部积分法。

用 $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ 定义对数函数，对数函数与指数函数的基本性质。

2024年中国矿业大学（北京）602数学分析考研核心题库

《数学分析》考研核心题库之计算题精编

1. 求和 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$.

【答案】该级数为Leibniz型的，从而收敛，现考虑函数 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n-1)(n+1)}$，其定义域为 $[-1,1]$.在 $(-1,1)$ 内，有

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n-1)(n+1)}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}\stackrel{\text{def}}{=\!=}xf(x)$$

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},$$

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x).$$

从而得到

$$S'(x)=xf(x)=-x\ln(1-x).$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x t\ln(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1-x)-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{1}{4}.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$$

$$=-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=-2S\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right]\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\left(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right).$$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在x=0处有任意阶导数 $f^{(n)}(0)=0$，求 $g'(x)$，其中

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

【答案】由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$ 可得

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}}{x}=0,$$

对任意 $x\neq 0$，有 $g'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\frac{1}{x}$.

3. **设 a>0，讨论方程$\ln x = ax^2$有几个实根.**

【答案】令 $f(x)=\ln x-ax^2$，于是$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-2a$，所以当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$时，$f(x)$严格单调递增；当 $x>\frac{1}{\sqrt{2a}}$时，$f(x)$严格单调递减. $f(x)$在$x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$处取最大值$-\frac{1}{2}[1+\ln(2a)]$. 又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，所以当$a>\frac{1}{2e}$时，方程无实根：当$a=\frac{1}{2e}$时，方程有一个实根；当$0<a<\frac{1}{2e}$时，方程有两个实根.

4. **求解下列各题.**

(1) 设$f_n(x)=\cos^n x$, $n=1,2,\cdots$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ①求极限函数 f(x)；②$f_n(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是否一致收敛？③是否有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

(2) 设$f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x, n=1,2,\cdots$, 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，求$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，并讨论$\{f_n(x)\}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上的一致收敛性。

【答案】(1) 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x=0$，当 x=0 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x=1$. 故$\{\cos^n x\}$的极限函数

$$g(x)=\begin{cases}0, 0\leqslant x<2^{-1}\pi,\\ 1, x=0.\end{cases}$$

由于极限函数 g(x) 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上不连续，从而函数列$\{\cos^n x\}$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上非一致收敛。

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx.$$

(2) $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x=\frac{\cos x(1-\cos^n x)}{1-\cos x}$

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$0<\cos x<1$，于是$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{\cos x}{1-\cos x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

由于$\sup\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right]}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{\cos^{n+1}x}{1-\cos x}=+\infty$，所以$\{f_n(x)\}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上非一致收敛。

5. **设$\{a_n\}$为正值递减数列，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}$.**

【答案】由于$\{a_n\}$为正值递减数列，所以显然有$\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\leqslant1$. 同样由递减性可知

$$\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\geqslant\frac{a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\geqslant1-\frac{a_1}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\geqslant1-\frac{2a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\right)=1$，故由夹逼法知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1$.

6. 计算积分$\iint\limits_{R^2} e^{-(2x^2+2xy+y^2)}\,dxdy$.

【答案】$\iint\limits_{R^2} e^{-(2x^2+2xy+y^2)}\,dxdy = \iint\limits_{R^2} e^{-2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}}\,dxdy$，令 $u=\sqrt{2}\left(x+\frac{y}{2}\right)$，$v=\frac{\sqrt{2}}{2}y$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$，

再利用$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$可得

$$\iint\limits_{R^2} e^{-2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}}\,dxdy=\pi,$$

即 $\iint\limits_{R^2} e^{-(2x^2+2xy+y^2)}\,dxdy=\pi$.

7. 求$f(x)=x\arccos x$的 Maclaurin 级数，并计算$f^{(n)}(0)$.

【答案】由于$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$，所以

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

从而

$$\begin{aligned}\arccos x&=\frac{\pi}{2}+\int_0^x(\arccos x)'dx\\&=\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx\\&=\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x\arccos x$的 Maclaurin 级数为$\frac{\pi}{2}x-x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+2}$.

由此展开式即知$f(0)=0$，$f'(0)=\frac{\pi}{2}$，$f^{(2)}(0)=-2$， $f^{(2n+1)}(0)=0$ $f^{(2n+2)}(0)=-(2n+2)[(2n-1)!!]^2$ $n=1,2,\cdots$

8. 计算$\iiint\limits_{\Omega}x\,dV$，其中$\Omega$为以$O(0,0,0)$、$A(R,0,0)$为球心，以 R 为半径的两个球体的公共部分.

【答案】两个球体的方程分别为$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$(x-R)^2+y^2+z^2\leqslant R^2$. 用球坐标$y=r\sin\phi\cos\theta$，$z=r\sin\phi\sin\theta$，$x=r\cos\phi$计算积分，曲面$(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$在球坐标下的方程为$r=2R\cos\phi$，积分区域$V'=V_1'\cup V_2'$，其中

$$V_1'=\left\{(r,\phi,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{3},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$$

$$V_2'=\left\{(r,\phi,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant 2R\cos\phi,\ \frac{\pi}{3}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$$

于是

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega}x\,dV\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\phi\int_0^R r\cos\phi r^2\sin\phi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{2R\cos\phi}r\cos\phi r^2\sin\phi dr\\&=\frac{\pi R^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\phi\cos\phi d\phi+8\pi R^4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\cos^5\phi d\phi=\frac{5}{24}\pi R^4\end{aligned}$$

9. 设$z=z(x,y)$定义在区域$\{(x,y)\mid x>0\}$上，并有连续的二阶偏导数. 试用极坐标表示$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【答案】令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则有$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$，

$$r_x=\cos\theta,\quad r_y=\sin\theta,\quad \theta_x=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \theta_y=\frac{\cos\theta}{r},$$

$$z_x=z_r r_x+z_\theta\theta_x=z_r\cos\theta-z_\theta\frac{\sin\theta}{r},\quad z_y=z_r r_y+z_\theta\theta_y=z_r\sin\theta+z_\theta\frac{\cos\theta}{r},$$

$$\begin{aligned}
z_{xx}&=(z_x)_r r_x+(z_x)_\theta\theta_x\\
&=\left(z_r\cos\theta-z_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)_r\cos\theta+\left(z_r\cos\theta-z_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)_\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&=\left(z_{rr}\cos\theta-z_{\theta r}\frac{\sin\theta}{r}+z_\theta\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\cos\theta\\
&\quad+\left(z_{r\theta}\cos\theta-z_r\sin\theta-z_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r}-z_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&=z_{rr}\cos^2\theta-z_{\theta r}\frac{\sin 2\theta}{r}+z_\theta\frac{\sin 2\theta}{r^2}+z_r\frac{\sin^2\theta}{r}+z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

同理可得

$$z_{yy}=z_{rr}\sin^2\theta+z_{\theta r}\frac{\sin 2\theta}{r}-z_\theta\frac{\sin 2\theta}{r^2}+z_r\frac{\cos^2\theta}{r}+z_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2}.$$

10. 设$J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx,\alpha>0,\beta>0$，证明：$\forall b>0$，反常积分J关于$\alpha\in[0,b]$一致收敛，并求反常积分J的值.

【答案】因 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\beta^2+x^2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+b^2x^2)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2b^2x}{1+b^2x^2}\cdot 2\sqrt{x}=0$，

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx$收敛.

又$\left|\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right|\leqslant\frac{\ln(1+b^2x^2)}{\beta^2+x^2}$，因此$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}dx$关于$\alpha\in[0,b]$一致收敛.

又由于$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx$在$(0,+\infty)$内闭一致收敛，且被积函数及它对参数的导数连续. 于是

$$J'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx=\frac{2\alpha}{\beta^2\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\beta^2}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)dx$$

$$=\frac{2\alpha}{\beta^2\alpha^2-1}\left(\beta\arctan\frac{x}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\arctan\alpha x\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2\alpha}{\beta^2\alpha^2-1}\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\beta\alpha+1}$$

所以$J=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{\beta t+1}dt=\frac{\pi}{\beta}\ln(\beta t+1)\big|_0^{\alpha}=\frac{\pi}{\beta}\ln(\beta\alpha+1)$.

2024 年中国矿业大学（北京）602 数学分析考研题库(仿真+强化+冲刺)【解答题】

2024 年中国矿业大学（北京）602 数学分析考研仿真五套模拟题

2024 年数学分析五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、解答题

1. 求摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant\pi)$的质心，设其质量分布是均匀的.

【答案】由于

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt,$$

从而得到$M=2a\rho_0\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt=4a\rho_0$. 因此，质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=-at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi+a\int_0^\pi\cos\frac{t}{2}dt+\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)dt=\frac{4}{3}a,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_0^\pi \rho_0 a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)dt=\frac{4}{3}a.$$

2. 计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$.

【答案】(1) 由题意可得，

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-2}}.$$

又有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=-1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-2}}\right)=-1,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=-1.$$

(2) 令$t=\frac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}$.

若$\alpha>1$，则$\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{\alpha t^{\alpha-1}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}=\infty$;

若$\alpha=1$，则$\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1+t-1}{t}=1$;

若$0\leqslant\alpha<1$，则$\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{\alpha t^{\alpha-1}}=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}=0$；

若$\alpha<0$，不妨令$\beta=-\alpha$，则$\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t)^{-\beta}-1}{t^{-\beta}}=0$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=\begin{cases}0, & \alpha<1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \infty, & \alpha>1.\end{cases}$

3. **若$F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$直接计算积分，求出 F(y)，再求出$F'(0)$，并检验应用积分号下求导数定理计算$F'(0)$的正确性.**

【答案】积分号下求导数：

(1) $F'(0)=\frac{dF}{dy}\Big|_{y=0}=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}(\ln\sqrt{x^2+y^2})dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{y=0}dx=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}dx=0$

(2)直接计算积分，求出 F(y)，再求出$F'(0)$.

当$y\neq0$时，

$$F(y)=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\int_0^1(1-\frac{y^2}{x^2+y^2})dx=$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+\int_0^1\frac{y}{1+(\frac{x}{y})^2}d\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+(y\arctan\frac{x}{y})\Big|_0^1$$

$$F(y)=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+y\arctan\frac{1}{y}$$

当 y=0 时，

$$F(0)=\int_0^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}[x\ln x-x]_\varepsilon^1=-1$$

$$F(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+y\arctan\frac{1}{y}, & y\neq0\\ -1, & y=0\end{cases}$$

$$F'(0)=\lim_{y\to0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+y\arctan\frac{1}{y}}{y}=$$

$$\lim_{y\to0}\arctan\frac{1}{y}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & y\to0^+\\ -\frac{\pi}{2}, & y\to0^-\end{cases}\quad(\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y^2)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{2y}{1+y^2}=0)$$

由此可见，不能用定理 4(Leibniz 公式)计算$F'(0)$，这是因为函数$f=\ln\sqrt{x^2+y^2}$在(0，0)点不连续.

4. 用 Taylor 公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{12}x^4}{x^6}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

【答案】(1) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + o(x^6)$$

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4 += \frac{7}{360}x^6 + o(x^6)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{360}x^6 + o(x^6)}{x^6} = \frac{7}{360}$$

(2) $e^x\sin x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(3) $xe^x = x + x^2 + o(x^2)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}$$

(4) $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

5. 设 n 为自然数，讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{ 为有理数}, \\ x^n, & x\text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性和可导性.

【答案】(1)连续性.

若$x_0\neq 0$，则在x_0的任意邻域内，总存在$x\neq x_0$，使$|f(x)-f(x_0)|\geqslant\frac{x_0^n}{2}$，故 f(x)在点$x_0$处不连续.

若$x_0=0$，则显然有(不妨设$|x|<1$)，$|f(x)-f(0)|=|x^n|<|x|$，故$f(x)$在处$x_0=0$连续.

(2)可导性.

由(1)的结论，f(x)在$x_0\neq 0$点处不可导.

在$x_0=0$处，有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \begin{cases} 0, & x\neq 0, x\text{ 为有理数}, \\ x^{n-1}, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

因此，当 n=1 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$不存在，即$f(x)$在 0 点不可导.

当$n\geqslant 2$时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \leqslant |x|^{n-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0,$$

即$f'(0)=0$, $f(x)$在$x_0=0$点可导.

6. **计算$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.**

【答案】令 $\arcsin x=t$，则

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx=\int \frac{t}{\sin^2 t}d\sin t=-\int td\csc t=-t\csc t+\int \csc tdt$$

$$=-t\csc t+\ln|\csc t-\cot t|+C.$$

因此，$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx=-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$

7. **(1)将 arctanx 展开为幂级数，求收敛半径.**

(2)利用(1)证明：$\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{4}{2n+1}+\cdots$.

(3)利用(2)中公式近似计算π的值，需要多少项求和，误差会不超过10^{-m}(m 为自然数).

【答案】(1)由于

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$$

所以

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

即其收敛半径为 R=1.

(2)令 x=1，有

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

即

$$\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{4}{2n+1}+\cdots$$

(3)由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}$为收敛的交错级数，故其余项$r_n$

$$|r_n|\leqslant\frac{4}{2n+1}\leqslant 10^{-m}$$

解得

$$n\geqslant\frac{4\times 10^{-m}-1}{2}$$

故至少需计算$\left[\frac{4\times 10^{m}-1}{2}\right]+1$项，这里$y=[x]$是取整函数.

8. **设$u=x+y,v=x-y,w=xy-z,z=z(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足$z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$，试确定出$w=w(u,v)$的表达式.**

【答案】由已知条件可得关系式$z=xy-w,w=w(u,v),u=x+y,v=x-y$，于是

$z_x=y-w_x=y-(w_u\cdot 1+w_v\cdot 1)=y-w_u-w_v$,

$z_y=x-w_y=x-(w_u\cdot 1+w_v\cdot(-1))=x-w_u+w_v$,

$z_{xx}=-(w_{uu}\cdot 1+w_{uv}\cdot 1)-(w_{vu}\cdot 1+w_{vv}\cdot 1)=-w_{uu}-2w_{uv}-w_{vv}$.

同理$z_{xy}=1-w_{uu}+w_{vv},z_{yy}=-w_{uu}+2w_{uv}-w_{vv}$. 将上式代入方程中化简得$w_{uu}=\frac{1}{2}$. 于是

$$w_u=\frac{1}{2}u+\varphi(v),\quad w=\frac{1}{4}u^2+\varphi(v)u+\psi(v)$$