全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年中国矿业大学

（北京）802高等代数考研精品资料

策划：辅导资料编写组

真题汇编 直击考点

考研笔记 突破难点

核心题库 强化训练

模拟试题 查漏补缺

高分学长学姐推荐

【初试】2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清PDF电子版支持打印，考研首选资料。

一、中国矿业大学（北京）802高等代数考研真题汇编及考研大纲

1．中国矿业大学（北京）802高等代数2005-2009年考研真题，暂无答案。

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

2.中国矿业大学（北京）802高等代数考研大纲

①2021年中国矿业大学（北京）802高等代数考研大纲。

②2023年中国矿业大学（北京）802高等代数考研大纲。

说明：考研大纲给出了考试范围及考试内容，是考研出题的重要依据，同时也是分清重难点进行针对性复习的首选资料，本项为免费提供。

二、2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研资料

3．《高等代数》考研相关资料

（1）《高等代数》[笔记+课件+提纲]

①中国矿业大学（北京）802高等代数之《高等代数》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②中国矿业大学（北京）802高等代数之《高等代数》本科生课件。

说明：参考书配套授课PPT课件，条理清晰，内容详尽，版权归属制作教师，本项免费赠送。

③中国矿业大学（北京）802高等代数之《高等代数》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《高等代数》考研核心题库（含答案）

①中国矿业大学（北京）802高等代数考研核心题库之填空题精编。

②中国矿业大学（北京）802高等代数考研核心题库之计算题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习首选资料。

（3）《高等代数》考研模拟题[仿真+强化+冲刺]

①2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习首选。

③2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺首选资料。

三、电子版资料全国统一零售价

4．本套考研资料包含以上一、二部分（高清PDF电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5．中国矿业大学（北京）802高等代数考研初试参考书

《高等代数》北京大学数学系编，高等教育出版社。

五、本套考研资料适用学院和专业及考试题型

理学院：数学/人工智能/统计学

填空题、计算题、解答题和证明题

目录

2024年中国矿业大学（北京）802高等代数备考信息

中国矿业大学（北京）802高等代数考研初试参考书目

《高等代数》北京大学数学系编，高等教育出版社。

中国矿业大学（北京）802高等代数考研招生适用院系及考试题型

理学院：数学/人工智能/统计学

填空题、计算题、解答题和证明题

中国矿业大学（北京）802 高等代数 2005 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学（北京校区）

二〇〇五年硕士研究生入学试题

科目名称： 共 2 页 第 1 页

高等代数试题

1. (10分)判断 $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+8$ 在有理数域上是否可约，并说明理由。

2. (14分) 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

3. (15分) 讨论线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+\mu x_2+x_3=3 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=4 \end{cases}$$

在λ, μ 取何值时无解、有唯一解、有无穷多解；有解时求出解.

4. (15分) 用正交线性替换将二次型 $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 化成标准形。

5. (14分) 求矩阵$A_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的Jordan标准形。

6. (10分)设线性空间V中任一个向量都可以唯一地表示成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的线性组合，证明$V$是$n$维线性空间。

7. (10分) 设$f(x)$是数域P上的多项式且$(f'(x),f''(x))=1$，证明$f(x)$的重因式是二重因式.

8. (12分) t取何值时，下列二次型是正定的?

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2tx_1x_2+2x_2x_3.$$

9. (10分) 是否存在n阶方阵A、B 满足$AB-BA=E$(E是n阶单位阵)? 为什么?

1

（试题和答卷一起交回）

命题时间：2004 年 11 月 30 日

中国矿业大学（北京校区）

二〇〇五年硕士研究生入学试题

科目名称：　　　　共 2 页　第 2 页

10. (14分) 设$F^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in F\}$是数域$F$上$n$维行向量空间，定义

$$\mathrm{A}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

(1) 证明，A是F^n上的一个线性变换，且$\mathrm{A}^n = 0$;
(2) 求A的值域的维数和核的维数。

11. (12分)设W_1 和W_2 是线性空间V的两个子空间，
(1) $W_1 \bigcup W_2$ 是V的子空间吗？为什么？
(2) 证明：$W_1 + W_2$ 是包含W_1 和W_2的最小的子空间。

12. (14分)设V是有理数域Q上的3维线性空间，A是其上的线性变换且

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \in V,\ \alpha \neq 0,\ \mathrm{A}(\alpha) = \beta,\ \mathrm{A}(\beta) = \gamma,\ \mathrm{A}(\gamma) = \alpha + \beta,$$

证明 α, β, γ线性无关。

(请将试题与答卷一起交回)

2

（试题和答卷一起交回）

命题时间：2004 年 11 月 30 日

中国矿业大学（北京）802 高等代数 2006 年考研真题（暂无答案）

中国矿业大学（北京）
二〇〇六年硕士研究生入学试题

科目名称：　　　　高等代数　　　　共 2 页　第 1 页

一、（13 分）设 $f(x)$，$g(x)$ 是两个互素的多项式：$(f(x),g(x))=1$，证明：
$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$$

二、（15 分）设
$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$，求 $f(x+1)-f(x)$

三、（16 分）当取何值时，下列线性方程组
$$\begin{cases} (k+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = k \\ kx_1 + (k-1)x_2 + x_3 = 2k \\ 3(k+1)x_1 + kx_2 + (k+3)x_3 = 3 \end{cases}$$
有唯一解、无解、无穷多解？有解时求出相应的解。

四、（12 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\beta=(b_1,\cdots,b_n)'$，若矩阵 A 的秩与 $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$ 的秩相等，

证明：线性方程组 $AX=\beta$ 有解。

五、（14 分）对于实矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，定义
$$S_1=\{X \mid AX=0,\ X\in\mathbf{R}^n\},\ S_2=\{X \mid A'AX=0,\ X\in\mathbf{R}^n\}$$
证明：1）$S_1=S_2$

2）秩(A)=秩$(A'A)$

六、（12 分）

1）方阵之间有一种称之为合同的关系，如果把 n 阶实对称矩阵按合同分类，可以分为多少类？

2）在 $m\times n$ 级的矩阵之间称之为等价（或相抵）的关系，如果将所有的 $n\times n$ 级的矩阵按等价分类，可以分为多少类？

七、（10 分）求复矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的约当标准形。

八、（16 分）已知 $W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$，$W_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$

是线性空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的两个子空间，求出 W_1，W_2，W_1+W_2，$W_1\cap W_2$ 的维数和基.

（试题和答卷一起交回）

命题时间：2005 年 12 月 6 日

中国矿业大学（北京）

二〇〇六年硕士研究生入学试题

科目名称： 高等代数 共 2 页 第 2 页

九、（12 分）用非退化的线性变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 化成标准形。

十、（14 分）设 $V=\{A=(a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij}\in\mathbf{R}\}$，对于 $A=(a_{ij})\in V$，定义其迹为对角元素的和：$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，

1）证明：对于 $A\in V$，$B\in V$，$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，

2）对于 $A\in V$，$B\in V$，证明：$(A,B)=\mathrm{tr}(AB')$ 是 V 上的内积。

十一、（16 分）设 $\mathbf{A}$ 是维线性空间 V 上的一个线性变换，$\mathbf{A}$V 的一组基为 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r$，且

$$\mathbf{A}\alpha_i=\beta_i\ (i=1,\dots,r)$$

证明：1）$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 线性无关；

2）$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)\oplus\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{0})$

（试题和答卷一起交回）

命题时间：2005 年 12 月 6 日

中国矿业大学（北京）802 高等代数考研大纲

2023 年中国矿业大学（北京）802 高等代数考研大纲

《高等代数》考试大纲

学院（盖章）： 负责人（签字）：

专业代码：070101、070102、070103、070104、070105 专业名称：基础数学、应用数学、计算数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论

考试科目代码：802 考试科目名称：高等代数

（一） 考试内容

试题以北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编写，王萼芳和石生明修订的《高等代数》（第三版）（高等教育出版社，2003 年 7 月）为蓝本，内容覆盖本教材的第一章至第九章，内容涉及：多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、l -矩阵、欧几里得空间等。试题重点考查的内容：

一、多项式

1. 多项式的带余除法及最大公因式
2. 复系数和实系数多项式的因式分解
3. 重因式与重根
4. 对称多项式基本定理

二、行列式

1. 行列式的定义及性质
2. n 阶行列式的计算
3. Cramer 法则

三、线性方程组

1. 消元法
2. 方程组解的判别定理
3. 方程组解的结构

四、矩阵

1. 矩阵的运算
2. 矩阵的秩
3. 矩阵的逆
4. 初等矩阵
5. 矩阵的分块

五、二次型

1. 二次型及其标准形
2. 二次型的规范型
3. 正定二次型

六、线性空间

1. 线性空间的维数、基
2. 基变换、向量的坐标及变换

3. 子空间及其运算
4. 同构的概念

七、线性变换

1. 线性变换与矩阵
2. 线性变换的特征值与特征向量
3. 线性变换的对角化
4. 值域与核
5. 不变子空间

八、l -矩阵

1. l -矩阵的标准形
2. 不变因子、行列式因子、初等因子
3. Jordan 标准形

九、欧几里得空间

1. 标准正交基
2. 正交变换
3. 实对称矩阵的标准形
4. 最小二乘法

（二） 考试基本要求

1. 基本概念要清晰

《高等代数》是一门非常重要的基础课程，在数学及相关领域中有重要的应用。同时，本课程也是学习抽象数学方法和思想的最佳课程。所以，对于本课程的基本概念需要特别注意，做到透彻理解。

2. 基本计算技巧要熟悉

除掌握基本计算方法外，也需要熟悉本课程中的一些计算技巧。如 n 阶行列式的计算、分块矩阵的技巧。

3. 基本定理要掌握

本课程的基本定理不仅需要会用，同时对于其证明方法也要求掌握。

（三） 考试形式

笔试、闭卷

（四） 考试基本题型

基本题型可能包括：填空题、计算题、解答题和证明题等。

2021年中国矿业大学（北京）802高等代数考研大纲

《高等代数》考试大纲

学院（盖章）：
负责人（签字）：
专业代码：070101、070102、070103
070104、070105 专业名称：基础数学、应用数学、计算数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论
考试科目代码：802 考试科目名称：高等代数

考试内容
试题以北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编写，王萼芳和石生明修订的《高等代数》（第三版）（高等教育出版社，2003年7月）为蓝本，内容覆盖本教材的第一章至第九章，内容涉及：多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、-矩阵、欧几里得空间等。试题重点考查的内容：
一、多项式
1.多项式的带余除法及最大公因式
2.复系数和实系数多项式的因式分解
3.重因式与重根
4.对称多项式基本定理
二、行列式
1.行列式的定义及性质
2.n阶行列式的计算
3.Cramer法则
三、线性方程组
1.消元法
2.方程组解的判别定理
3.方程组解的结构
四、矩阵
1.矩阵的运算
2.矩阵的秩
3.矩阵的逆
4.初等矩阵
5.矩阵的分块
五、二次型
1.二次型及其标准形
2.二次型的规范型
3.正定二次型
六、线性空间
1.线性空间的维数、基
2.基变换、向量的坐标及变换
3.子空间及其运算
4.同构的概念
七、线性变换
1.线性变换与矩阵
2.线性变换的特征值与特征向量

3.线性变换的对角化
4.值域与核
5.不变子空间
八、-矩阵
1.-矩阵的标准形
2.不变因子、行列式因子、初等因子
3.Jordan 标准形
九、欧几里得空间
1.标准正交基
2.正交变换
3.实对称矩阵的标准形
4.最小二乘法
考试基本要求
1.基本概念要清晰
《高等代数》是一门非常重要的基础课程，在数学及相关领域中有重要的应用。同时，本课程也是学习抽象数学方法和思想的最佳课程。所以，对于本课程的基本概念需要特别注意，做到透彻理解。
2.基本计算技巧要熟悉
除掌握基本计算方法外，也需要熟悉本课程中的一些计算技巧。如 n 阶行列式的计算、分块矩阵的技巧。
3.基本定理要掌握
本课程的基本定理不仅需要会用，同时对于其证明方法也要求掌握。
考试形式
笔试、闭卷
考试基本题型
基本题型可能包括：填空题、计算题、解答题和证明题等。

2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研核心笔记

《高等代数》考研核心笔记

第1章　多项式

考研提纲及考试要求

考点：多项式的加、减、乘运算及运算律
考点：带余除法
考点：整除
考点：最大公因式
考点：互素
考点：最大公因式与互素概念的推广
考点：不可约多项式

考研核心笔记

【核心笔记】数域

代数性质：关于数的加减乘除等运算性质引入：关于数的范围的讨论

定义：设P是一些复数组成的集合，其中包括0和1，如果P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍是P中的数，那么称P为一个数域。

另一说法：如果包含0和1的一个数集P，对于加减乘除（除数不为0）运算都是封闭的，那么称P为一个数域。

重要结论：最小数域为有理数域（任何数域包含有理数域）

【核心笔记】一元多项式

1.一元多项式的概念

定义：设n是一非负整数，x是一个符号（文字），形式表达式：

$a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+\dots+a_1x_1+a_0$ 其中 $a_i(i=0\dots n)\in P$。称为系数在数域P中的一元多项式。（数域P上的一元多项式）

（1）记

$$f(x)=a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+\dots+a_1x_1+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$g(x)=b_mx_m+b_{m-1}x_{m-1}+\dots+b_1x_1+b_0=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

（2）其中$\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$称为$f(x)$的i次项a_i为i次项系数。

（3）$a_n\neq 0$，则a_nx^n为$f(x)$的首项a_n为首项系数，n为$f(x)$的次数。记$\partial(f(x))=n$。

（4）所有系数均为 0 的多项式称为零多项式，记 0（唯一不定次数）

（5）$f(x)=g(x)\Leftrightarrow$除去系数为 0 的项外，同次项系数均相等。（注意 0 多项式与 0 次多项式的区别）

2.多项式的加、减、乘运算及运算律

设

$$f(x)=a_n x_n+a_{n-1}x_{n-1}+\dots+a_1x_1+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$$

$$g(x)=b_m x_m+b_{m-1}x_{m-1}+\dots+b_1x_1+b_0=\sum_{j=0}^{m}b_j x^j$$

补充系数为 0 的项，使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同多的项数后

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \quad \partial(f+g)\le\max(\partial f,\partial g)$$

$$f(x)\ g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}(\sum_{j+i=s}a_ib_j)x^s \quad \partial(fg)=\partial f+\partial g$$

f，g 均不为 0 多项式

算律：

（1）加法交换律 $f+g=g+f$

（2）法结合律 $(f+g)+h=f+(g+h)$

（3）乘法交换律 $f\cdot g=g\cdot f$

（4）乘法结合律 $(fg)h=f(gh)$

（5）乘法对加法的分配率 $f(g+h)=fg+fh$

（6）乘法消去律 $fg=fh$ 且 $f\neq 0$，则 $g=h$（$fg-fh=0$ $f(g-h)=0$ $f\neq 0$ 则 $g-h=0$ $g=h$）

3.一元多项式环的概念

所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，记 $P[x]$ P 为系数域

常用数学归纳法：关于自然数的命题

（1）当初始值时，命题成立

（2）假设小于或等于 $n-1$ 时，命题成立，往证 n 时，命题成立

反证法：

（1）假设结论成立

（2）按照正确分析，综合方法，退出与已知或事实矛盾的结果

（3）结论成立

【核心笔记】整除的概念

1.带余除法

引例

$$f(x)=x^3-3x^2-x-1\ g(x)=3x^2-2x+1\ g(x)=3x^2-2x+1$$

$$\begin{array}{r|c|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\hline
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\hline
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}$$

于是

$$f(x)=(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{7}{9})g(x)+(-\tfrac{26}{9}x-\tfrac{2}{9})$$

商式余式

带余除法定理：

对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，一定有 $P[x]$ 中的 $q(x)$，$r(x)$ 存在，使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立。

其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$，并且 $q(x)$ 与 $r(x)$ 是唯一确定的。

证明：

$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 中 $q(x)$ 是商式，$r(x)$ 是余式。

2.整除

定义：如果存在 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ 成立。那么称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记做 $g(x)\mid f(x)$。$g(x)$ † $f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$

（1）$g(x)$ 整除 $f(x)$ 时 $g(x)$ 称为因式，$f(x)$ 为倍式

（2）$g(x)\neq 0$ 时，$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)=0$

（3）$0|0$ 有意义且 0 只能整除 0 多项式。零次多项式只能被零次多项式整除。

$f(x)|f(x)\ \ f(x)|0\ \ a\mid f(x)$ （$a\neq 0$）

性质：

（1） $f\mid g$，$g\mid f\Rightarrow f=c\cdot g$ c 为非零常数

（2） $f\mid g$，$g\mid h\Rightarrow f\mid h$

（3） $f\mid g_i$，$i=1,2,\cdots r\Rightarrow f\mid(u_1g_1+u_2g_2+\cdots u_rg_r)$，其中 u_i 是任意多项式。分别证明之。

结论：

（1） f 与 cf 具有相同的因式与倍式，讨论时可互相替代。

（2）两个多项式的整除关系不引文为系数域的扩大而改变。

【核心笔记】最大公因式

1.最大公因式

公因式：$\varphi(x)\mid f(x)$，$\varphi(x)\mid g(x)$ 则称 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个公因式

定义：对于 $f(x)$，$g(x)$ 若 $d(x)$ 满足：

（1） $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式

（2） $\forall h(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式，有 $h(x)\mid d(x)$，则称 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式。

引理：$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，那么 $f(x)$，$g(x)$ 和 $g(x)$，$r(x)$ 有相同的公因式。

存在性：

（1） $f=g=0$ $d=0$

（2） $f=0$，$g\neq 0$ $d=g$

（3） $f\neq 0$，$g\neq 0$ 时定理：对于 f，g，一定存在 d，且 d 可表示成 f，g 的一个组合，即 $d=uf+vg$

证：$f=gq_1+r_1$ f，g 与 g，r_1 有相同的公因式

$g=r_1q_2+r_2$ g，r_1 与 r_1，r_2 有相同的公因式

$r_1=r_2q_3+r_3$ r_1，r_2 与 r_2，r_3 有相同的公因式

…

$r_{s-2}=r_{s-1}q_s+r_s$ …

$r_{s-1}=r_sq_{s+1}$

又因 $\partial g>\partial r_1>\partial r_2>\cdots>\partial r_s>\cdots$，故有限次必可整除，即 $r_{s+1}=0$，于是 r_s 是 f，g 的最大公因

2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研辅导课件

《高等代数》考研辅导课件

第1章　多项式

- 多项式理论是高等代数的重要内容之一。它不但为高等代数所讲授的基本内容提供了理论依据，其中的一些重要定理和方法在进一步学习数学理论和解决实际问题时常常用到。本章介绍一元多项式的基本理论。

第1章　多项式

- 数域
- 一元多项式
- 整除的概念
- 最大公因式
- 因式分解定理
- 重因式
- 多项式函数
- 复系数与实系数多项式的因式分解
- 有理系数多项式

§1　数域

- 要说的话：对所要讨论的问题，通常要明确所考虑的数的范围，不同范围内同一问题的回答可能是不同的。例如，$x^2+1=0$在实数范围与复数范围内解的情形不同。
- 常遇到的数的范围：有理数集、实数集、复数集共性（代数性质）：加、减、乘、除运算性质
- 有些数集也有与有理数集、实数集、复数集相同的代数性质

　为在讨论中将其统一起来，引入一个一般的概念——数域。

§1　数域

1. 数域的定义　设P是由一些复数组成的集合，其中包括0与1. 如果P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在P中，则称P为一个数域.

　常用到的数域：有理数域Q、实数域R、复数域C.

2. 数域定义的另一形式　包含0与1的数集P，如果对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）运算封闭，则称P为一个数域.

例1　所有形如$a+b\sqrt{2}$（a、b是有理数）的数构成一个数域$Q(\sqrt{2})$．

解 (i) $0,1\in Q(\sqrt{2})$；　(ii)对四则运算封闭.事实上

$\forall\alpha,\beta\in Q(\sqrt{2})$,设$\alpha=a+b\sqrt{2},\beta=c+d\sqrt{2}$,有

$$\alpha\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$$

$$\alpha\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$$

设$\alpha=a+b\sqrt{2}\neq0$，则$a-b\sqrt{2}\neq0$且

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})\quad\|$$

3. 有理数域是一个最小的数域
（任何数域都包含有理数域作为它的一部分）

证：设P为一个数域.

　由定义知$1\in P$，又P对加法封闭知：1+1=2，1+2=3，…P包含所有自然数；

　由$0\in P$及P对减法的封闭性知：P包含所有负整数，因而P包含所有整数；

　任何一个有理数都可以表为两个整数的商，由P对除法的封闭性知：P包含所有有理数. 即

　任何数域都包含有理数域作为它的一部分.

§2 一元多项式（以固定数域P为基础）

1. 定义　设x是一个符号(文字)，n为非负整数.形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0$$

i 次项

首项($a_n\neq0$)　i 次项系数 —$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)\in P$

称为系数在数域P中的一元多项式，简称为数域P上的一元多项式.

符号x 可以是为未知数，也可以是其它待定事物.

　习惯上记为$f(x)$，$g(x)$……或f, g……上述形式表达式可写为

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

几个概念：

- 零多项式 ——系数全为0的多项式
- 多项式相等 —— $f(x)=g(x)$当且仅当同次项的系数全相等（系数为零的项除外）
- 多项式$f(x)$的次数 —— $f(x)$的最高次项对应的幂次，记作$\partial(f(x))$或$deg\,(f(x))$.

如：$f(x)=3x^3+4x^2-5x+6$的次数为3，即

$deg\,(f(x))=3$

2. 多项式的运算

例 $f(x)=2x^2+3x-1, g(x)=x^3+2x^2-3x+2$，则

$$f(x)+g(x)=(2x^2+3x-1)+(x^3+2x^2-3x+2)=x^3+4x^2+1$$

$$f(x)-g(x)=(2x^2+3x-1)-(x^3+2x^2-3x+2)=-x^3+6x-3$$

$$f(x)g(x)=(2x^2+3x-1)(x^3+2x^2-3x+2)$$
$$=2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2$$

乘法较为复杂，应用竖式方便、明了：

2. 多项式的运算

$$\begin{array}{rr}
 & f(x)=2x^2+3x-1 \\
\times & \underline{g(x)=x^3+2x^2-3x+2} \\
 & 2x^5+3x^4-x^3 \\
 & 4x^4+6x^3-2x^2 \\
 & -6x^3-9x^2+3x \\
 & \underline{4x^2+6x-2}
\end{array}$$

$\therefore f(x)g(x)=2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2$

或为更简明，应用分离系数法进行：

2. 多项式的运算

设 $f(x)$，$g(x)$ 为数域 P 上的一元多项式，不妨令

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

加法：$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\pm b_i)x^i$，当 $n\ge m$

乘法：$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+a_0b_0$

$$=\sum_{s=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=s}a_ib_j\Big)x^s$$

结论：(1) $\partial(f(x)\pm g(x))\le max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$

(2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$，当 $f(x)\ne0, g(x)\ne0$

且乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积

2. 多项式的运算

运算律 设 $f(x), g(x), h(x)$ 为数域 P 上的一元多项式，则

（1）$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

（2）$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$

（3）$f(x)g(x)=g(x)f(x)$

（4）$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

（5）$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$

（6）若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 且 $f(x)\ne0$，则

$$g(x)=h(x)$$

证（4）$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,\ h(x)=\sum_{k=0}^{l}c_kx^k$

考虑等式两端 t 次项的系数.

左边：$f(x)g(x)$ 中 s 次项的系数为 $\sum_{i+j=s}a_ib_j$

故 t 次项的系数 $\sum_{s+k=t}\Big(\sum_{i+j=s}a_ib_j\Big)c_k=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$

右边：$g(x)h(x)$ 中 r 次项的系数为 $\sum_{j+k=r}b_jc_k$

故 t 次项的系数 $\sum_{i+r=t}a_i\Big(\sum_{j+k=r}b_jc_k\Big)=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$

证毕.

例1 当 a,b,c 取何制值时，多项式 $f(x)=x-5$ 与 $g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$ 相等？

解 由于

$$g(x)=(a+c)x^2+(-4a+b-c)x+(4a+b+2c)$$

根据多项式相等的定义，得

$$\begin{cases} a+\quad\ \ c=0\\ -4a+b-\ \ c=1\\ 4a+b+2c=-5\end{cases}$$

解之得 $a=-\dfrac{6}{5}, b=-\dfrac{13}{5}, c=\dfrac{6}{5}$.

例2 设 $f(x)$, $g(x)$ 与 $h(x)$ 为实数域上多项式. 证明：如果

$$f^2(x)=x\,g^2(x)+x\,h^2(x)$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$

若 $g(x)\ne0$，由于实数域内，非0数的平方为正数,所以 $f^2(x)$ 的最高次项系数为正数.当 $g^2(x)+h^2(x)=0$ 时, $h^2(x)$ 的最高次项系数必为负数.这是不可能的！所以 $g(x)=0$. 同理 $h(x)=0$.

$\ne0$，则 $f^2(x)\ne0$.由

$=x\,g^2(x)+x\,h^2(x)=x(g^2(x)+h^2(x))$

.因此

$(x))=\partial(x(g^2(x)+h^2(x)))$

数,而 $\partial(x(g^2(x)+x\,h^2(x)))$ 为奇数,因此

$f^2(x)\ne x\,g^2(x)+x\,h^2(x)$

$f(x)=0$.此时 $x(g^2(x)+h^2(x))=0$,但 x 为一非

$g^2(x)+h^2(x)=0$ 为什么？

为实系数多项式，必有 $g(x)=h(x)=0$.于是

$f(x)=g(x)=h(x)=0$.

3.多项式环

数域 P 上的一元多项式的全体，称为数域 P 上的一元多项式环，记作 $P[x]$.

P——$P[x]$ 的系数域.

思考与练习

1.计算 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, 其中

$f(x)=2x^4-x^3+2x^2-x+1$, $g(x)=x^2-3x-1$.

2.求 k,l,m, 使

$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1$.

3. 例2中，若 $f(x)$, $g(x)$ 为复数域上多项式. 能否由

$$f^2(x)+g^2(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)=0\ ?$$

考虑 $f(x)=ix$, $g(x)=x$. 显然 $f^2(x)+g^2(x)=0$ 但 $f(x)\ne0, g(x)\ne0$.

§ 3 整除的概念（在$P[x]$中进行）

- 引言 在一元多项式环$P[x]$中,有$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$. 是否有除法？应该如何描述$P[x]$中两个多项式相除的关系？两个多项式除法的一般结果是什么？下进行讨论和研究.
- 引例 （以中学代数多项式除法为基础）考虑
  $f(x)=3x^3+4x^2-5x+6$
  $g(x)=x^2-3x+1$
  求出$f(x)$除以$g(x)$的商和余式.

采用长除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+13 \quad \boxed{\text{商}q(x)} \\
\boxed{g(x)}\;\; x^2-3x+1 & 3x^3+4x^2-5x+6 \quad \boxed{f(x)} \\
 & 3x^3-9x^2+3x \\
\hline
 & 13x^2-8x+6 \\
 & 13x^2-39x+13 \\
\hline
 & 31x-7 \quad \boxed{\text{余式 } r(x)}
\end{array}
$$

即 $3x^3+4x^2-5x+6=(3x+13)(x^2-3x+1)+(31x-7)$

结果：$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$

采用竖式除法

$g(x)$	$f(x)$	$q(x)$ $\boxed{\text{商}}$
x^2-3x+1	$3x^3+4x^2-5x+6$	$3x+13$
	$3x^3-9x^2+3x$	
	$13x^2-8x+6$	
	$13x^2-39x+13$	
	$31x-7$ $\boxed{\text{余式}}$	

即 $3x^3+4x^2-5x+6=(3x+13)(x^2-3x+1)+(31x-7)$

结果：$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$

1.带余除法

定理 设$f(x)$, $g(x)\in P[x]$, $g(x)\neq 0$，则存在唯一的多项式$q(x)$, $r(x)\in P[x]$, 使 $\boxed{\text{商}}$

$$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$$

其中$r(x)=0$或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$. $\boxed{\text{余式}}$

称上式中的$q(x)$ 为$g(x)$ 除$f(x)$的商，$r(x)$为$g(x)$除$f(x)$的余式.

（带余除法）定理证明

存在性 若$f(x)=0$, 取$q(x)=r(x)=0$即可.以下设$f(x)\neq 0$. $\partial(f(x))=n$, $\partial(g(x))=m$. 对$f(x)$ 的次数n作数学归纳法.

当$n<m$时,取$q(x)=0$, $r(x)=f(x)$，有

$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$，结论成立.

当$n\geq m$时,假设次数小于n时结论成立，即存在多项式$q(x)$, $r(x)\in P[x]$, 使$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$.以下证明次数为n时结论也成立.

设$f(x)$、$g(x)$ 的首项分别为ax^n及$b\,x^m$.令

$f_1(x)=f(x)-b^{-1}a\,x^{n-m}g(x)$ (*)

注意到$b^{-1}a\,x^{n-m}g(x)$与$f(x)$有相同的首项,知$\partial(f_1(x))<n$ 或为$f_1(x)=0$.

（带余除法）定理证明（续1）

若$f_1(x)=0$，取$q(x)=b^{-1}a\,x^{n-m}$，$r(x)=0$，有

$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$；

若$\partial(f_1(x))<n$，由归纳法假设，有$q_1(x)$, $r_1(x)\in P[x]$,使

$f_1(x)=q_1(x)\,g(x)+r_1(x)$ (**)

其中$\partial(r_1(x))<\partial(g(x))$或$r_1(x)=0$. 于是由式 (*)、(**)有

$f(x)=\underbrace{(q_1(x)+b^{-1}a\,x^{n-m})}_{q(x)}g(x)+\underbrace{r_1(x)}_{r(x)}$

由归纳法原理，对任意的$f(x)$, $g(x)\neq 0$，$q(x)$, $r(x)$的存在性证毕.

（带余除法）定理证明（续2）

唯一性 若还有$q^*(x)$, $r^*(x)\in P[x]$,使

$f(x)=q^*(x)\,g(x)+r^*(x)$

其中$\partial(r^*(x))<\partial(g(x))$或$r^*(x)=0$. 则

$q(x)\,g(x)+r(x)=q^*(x)\,g(x)+r^*(x)$

即

$(q(x)-q^*(x))\,g(x)=r^*(x)-r(x)$

若$q(x)\neq q^*(x)$，由假设 $g(x)\neq 0\Rightarrow r^*(x)-r(x)\neq 0$且

$\partial(q(x)-q^*(x))+\partial(g(x))=\partial(r^*(x)-r(x))$

但$\partial(g(x))>\partial(r^*(x)-r(x))$,矛盾.

因此$q(x)=q^*(x)$, $r^*(x)=r(x)$. ‖

例1 求$g(x)$ 除$f(x)$ 所得的商$q(x)$和余式$r(x)$，这里

$f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$, $g(x)=x^4+2x^3+x+2$.

解：

$g(x)$	$f(x)$	$q(x)$ $\boxed{\text{商}}$
x^4+2x^3+x+2	$x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$	$x+1$
	$x^5+2x^4+x^2+2x$	
	x^4+x^3+x+1	
	x^4+2x^3+x+2	
	$-x^3-1$ $\boxed{\text{余式}}$	

即有 $x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1=(x+1)(x^4+2x^3+x+2)+(-x^3-1)$

所求商$q(x)=x+1$，余式 $r(x)=-x^3-1$.

带余除法表明： $f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$

用多项式$g(x)\neq 0$去除多项式$f(x)$，可以得到一个商$q(x)$及余式$r(x)$，余式一般不为零.当余式等于0时，得到两个多项式之间的一种关系——整除.

2.整除的概念

(1)定义 设$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，如果存在多项式$h(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=h(x)\,\underbrace{g(x)}_{f(x)\text{的因式}}$$

$g(x)$的倍式

称$g(x)$整除$f(x)$(或$f(x)$能被$g(x)$整除)，记为$g(x)|f(x)$.

此时称$g(x)$为$f(x)$的因式，$f(x)$为$g(x)$的倍式.

$f(x)$的因式

特别地，当$g(x)$不能整除$f(x)$时，记为$g(x)\nmid f(x)$.

例如，$f(x)=3x^3+4x^2-x$, $g(x)=5x$,有$g(x)|f(x)$.

因 $3x^3+4x^2-x=\underbrace{(\frac{3}{5}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{1}{5})}_{h(x)}5x$

(2)整除性判别

定理 设$f(x)$, $g(x)\in P[x]$, $g(x)\neq 0$, $g(x)|f(x)$

$\Leftrightarrow g(x)$除$f(x)$的余式为零.

证 ($\Leftarrow$) 若余式$r(x)=0$，则$f(x)=q(x)g(x)$,即$g(x)|f(x)$;

($\Rightarrow$)若$g(x)|f(x)$，则

$f(x)=q(x)g(x)=q(x)g(x)+0$

即$r(x)=0$. ‖

例2 设$f(x)=2x^4-3x^3+5x^2-6$, $g(x)=x^2-x-1$,判断$g(x)$能否整除$f(x)$.

解 由

$$\begin{array}{r|l|l}
g(x) & \quad f(x) & q(x)\\
x^2-x-1 & 2x^4-3x^3+5x^2-6 & 2x^2-x+6\\
 & 2x^4-2x^3-2x^2 & \\ \hline
 & \quad -x^3+7x^2-6 & \\
 & \quad -x^3+x^2+x & \\ \hline
 & \qquad 6x^2-x-6 & \\
 & \qquad 6x^2-6x-6 & \\ \hline
 & \qquad\quad 5x &
\end{array}$$

$r(x)\neq 0$

因此$g(x)\nmid f(x)$.

例3 m,p,q满足什么条件，$g(x)=x^2+mx-1$能整除$f(x)=x^3+px+q$?

方法1

解 由带余除法，得

$x^3+px+q=(x-m)(x^2+mx-1)+[(m^2+p+1)x+(q-m)]$

$g(x)|f(x)\Leftrightarrow(m^2+p+1)x+(q-m)=0$

$\Leftrightarrow m^2+p+1=0$且$q-m=0$

$\Leftrightarrow p=-1-m^2$且$q=m$.

方法2

利用整除的定义，比较$g(x)$与$f(x)$的次数及首项系数.

$g(x)|f(x)\Leftrightarrow$ 存在$h(x)=x+a$ 使 $x^3+px+q=(x+a)(x^2+mx-1)$

比较等式两边同次项的系数，得

$$\begin{cases}m+a=0\\ ma-1=p\\ -a=q\end{cases}\xRightarrow{\text{消去}a}\begin{cases}m^2+p+1=0,\\ q-m=0.\end{cases}$$

例4 证明：如果$g(x)|f_1(x)+f_2(x)$，$g(x)|f_1(x)-f_2(x)$，则$g(x)|f_1(x)$，$g(x)|f_2(x)$.

证 由假设，有$h_1(x)$, $h_2(x)$使

$f_1(x)+f_2(x)=h_1(x)\,g(x)$

$f_1(x)-f_2(x)=h_2(x)\,g(x)$

因此

$f_1(x)=[\frac{1}{2}h_1(x)+\frac{1}{2}h_2(x)]g(x)$

$f_2(x)=[\frac{1}{2}h_1(x)-\frac{1}{2}h_2(x)]g(x)$

由整除的定义，知$g(x)|f_1(x)$，$g(x)|f_2(x)$.

(3)整除的性质

- $f(x)|f(x)$——任意一个多项式可整除其自身；
- $f(x)|0$——任意一个多项式可整除零多项式；
- $c|f(x)$——零次多项式可整除任一多项式；
- 若$f(x)|g(x)$，$g(x)|f(x)$，则$f(x)=cg(x)$；
- 若$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)$，则$f(x)|h(x)$；(传递性)
- 若$f(x)|g(x)$，则$\forall c\neq 0, cf(x)|g(x)$；
- 若$f(x)|g_i(x)$ ($i=1,2,\ldots,r$) ,则$\forall u_i(x)\in P[x]$

$f(x)|\underbrace{(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x))}_{g_i(x)\text{的组合 } i=1,2,\ldots,r}$

整除性质的证明

- $f(x)=1\cdot f(x)$；
- $0=0\cdot f(x)$;
- $f(x)=c[c^{-1}f(x)]$;
- 设$f(x)|g(x)$，$g(x)|f(x)$. 有

$f(x)=h_1(x)\,g(x)$，$g(x)=h_2(x)\,f(x)$;

若$f(x)$，$g(x)$有一个是0多项式，则另一个必为0，因此任取非零常数c，即有$f(x)=c\,g(x)$.

若$f(x)$、$g(x)$均不为0，有

$f(x)=h_1(x)\,h_2(x)\,f(x)$

$\Rightarrow h_1(x)\,h_2(x)=1$

$\Rightarrow \deg(h_1(x)\,h_2(x))=\deg(h_1(x))+\deg(h_2(x))=0$

$\Rightarrow\deg(h_1(x))=\deg(h_2(x))=0$.即$h_1(x)$为非0常数.

2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研复习提纲

《高等代数》考研复习提纲

高等代数复习重点提纲

第一学期

第一周：

（第一章 §1）

代数系统的概念；数域的定义；

定理 任一数域都包含有理数域；

集合的运算，集合的映射（像与原像、单射、满射、双射）的概念；求和号与求积号。

（第一章 §2）

高等代数基本定理及其等价命题；

推论 数域上的两个次数小于 m 的多项式如果在 m 个不同的复数处的取值相等，则此二多项式相等；

韦达定理；

实系数代数方程的根成对出现；

推论 实数域上的奇数次一元代数方程至少有一个实根。

第二周：

（第一章 §3）

数域 K 上的线性方程组的初等变换的定义；

命题 线性方程组经过初等变换后与原方程组同解；

线性方程组的系数矩阵和增广矩阵的以及矩阵的初等变换的定义；

线性方程组无解、有唯一解和有无穷多解的判别准则；

命题 变元个数大于方程个数的齐次线性方程组必有非零解；

线性方程组的解的存在性与数域的变化无关（这不同于高次代数方程）。

（第二章 §1）

向量和 n 维向量空间的定义及性质；

线性组合和线性表出的定义；

向量组的线性相关与线性无关的定义以及等价表述。

第三周：

（第二章 §1）

向量组的秩；

向量组的线性等价；极大线性无关组；

集合上的等价关系。

（第二章 §2）

矩阵的行秩与列秩，行（列）初等变换不改变行（列）秩；

命题 矩阵的行（列）初等变换不改变列（行）秩；

矩阵的转置；

推论 矩阵的行、列秩相等，称为矩阵的秩，矩阵 A 的秩记为 $\mathrm{r}(A)$；

满秩方阵；

矩阵的相抵；相抵是等价关系；秩是相抵等价类的完全不变量；

用初等变换求矩阵的秩。

第四周：

（第二章 §3）

齐次线性方程组的基础解系；

定理 数域上的齐次线性方程组的基础解系中的向量个数等于变元个数减去系数矩阵的秩；

基础解系的求法；

非齐次线性方程组的解的结构。

（第二章 §4）

矩阵的加法和数乘的定义；

矩阵的乘法的定义，

矩阵的运算（加法、数乘、乘法、转置）的性质；

矩阵的和与积的秩。

第五周：

（第二章 §5）

n 阶方阵，对角矩阵，数量矩阵，单位矩阵，初等矩阵，对称、反对称、上三角、下三角矩阵；

命题 矩阵的初等行（列）变换等价于左（右）乘初等矩阵；

定理 一个方阵是满秩的当且仅当它能表示为初等矩阵的乘积。

推论 设 A 是满秩矩阵，对于任意矩阵 B, C，有 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$，$\mathrm{r}(CA)=\mathrm{r}(C)$（只要乘法有意义）.

可逆矩阵，方阵的逆矩阵的定义；

群和环的定义；

命题　数域K上的n阶可逆矩阵的全体关于矩阵的乘法构成群，称为K上的一般线性群，记为$\mathrm{GL}_n(K)$；数域K上的n阶方阵的全体关于矩阵的加、乘法构成环，称为K上的全矩阵环，记为$\mathrm{M}_n(K)$；

可逆矩阵转置的逆矩阵；

命题　矩阵可逆当且仅当满秩；

用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵，矩阵方程$AX=B$和$XA=B$的解法（A为可逆阵）；

例　设A和B为数域K上的$m\times n$和$n\times s$矩阵，则

$$\mathrm{r}(AB)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n.$$

第六周：

（第二章　§6）

分块矩阵的乘法，准对角阵的乘积和秩，可逆准对角阵的逆矩阵；

命题　分块矩阵$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$的秩大于等于$A$与$B$的秩的和；

命题　设A、B、C为数域K上的三个可以连乘的矩阵，则

$$\mathrm{r}(ABC)+\mathrm{r}(B)\geq \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC).$$

矩阵分块技巧的运用（挖洞法）。

（第三章　§1，§2）

平行四边形的有向面积和平行六面体的有向体积具有的三条性质；

利用上述三条性质定义n阶方阵的行列式函数的det；

定理　行列式函数存在、唯一；

行列式的六条性质。

第七周：

（第三章　§2）

行列式的展开式；

范德蒙行列式；

准对角阵的行列式；

可微函数的方阵的行列式的微商。

（第三章　§3）

行列式的应用：用行列式求逆矩阵；克莱姆法则（解线性方程组）；

矩阵乘积的行列式；

用矩阵的子式的行列式刻画矩阵的秩。

第八周：

（第三章 §4）

行列式的完全展开式。

期中考试。

第九周：

（第四章 §1）

线性空间的定义及例；

零向量和负向量的唯一性，向量减法的定义，线性空间的加法和数乘运算与通常数的加、乘法类似的性质；

线性空间中线性组合和线性表出的定义，向量组的线性相关与线性无关的定义以及等价表述，向量组的秩，向量组的线性等价；极大线性无关组。

线性空间的基与维数，向量的坐标。

第十周：

（第四章 §1，§2）

线性空间的基变换，基的过渡矩阵；

向量的坐标变换公式；K^n 中的两组基的过渡矩阵；

线性空间的子空间的定义（等价于在减法和数乘下封闭）。

子空间的交与和，生成元集；

维数公式。

第十一周：

（第四章 §2）

子空间的直和的四个等价定义；

直和因子的基的并构成直和的基；

补空间的定义及存在性（通常不唯一）。

线性空间关于一个子空间的同余关系（是等价关系）

商空间的定义（线性空间 V 关于子空间 W 的商空间记为 V/W），定义的合理性；

命题 $\dim V = \dim W + \dim V/W$；

商空间的基的选取。

第十二周：

2024年中国矿业大学（北京）802高等代数考研核心题库

《高等代数》考研核心题库之填空题精编

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix} =$_________

【答案】$a_1+a_2+a_3+a_4$

2. $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} =$ 中x^3的系数为_________

【答案】-1

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1+1 \end{vmatrix} =$_________

【答案】$a_4+a_3+a_2+a_1+1$

4. **两个非零 n 维向量线性相关的充要条件是它的_________。**

【答案】分量成比例

5. **设 A，B 为两个三阶方阵，且$|A|=-1$，$|B|=2$,那么$|(A'B^{-1})^2|=$_________。**

【答案】$\frac{1}{4}$

6. **矩阵 A 的秩为 0 的充要条件是 A=_________。**

【答案】0

7. **设$|A|=a\neq 0$，则$|A^{-1}|=$_________。**

【答案】$\frac{1}{a}$

8. $f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$中$x^3$的系数为_________

【答案】-5

9. **6 级行列式中项 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 的符号为__________。**

【答案】正

10. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} =$__________

【答案】(b-a)(c-a)(c-b)

11. **设 A 可逆，则数乘矩阵 KA 可逆的充要条件是__________。**

【答案】K≠0

12. **线性方程组 AX=B 有解的充要条件是__________。**

【答案】r(A)=r(A⋮B)

13. **设 A=**$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, 则$A^{-1}$ =__________

【答案】$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

14. **若 f(x)|g(x)+h(x)且 f(x)|g(x)-h(x),则__________。**

【答案】f(x)|g(x)且 f(x)|h(x)

15. **若排列 1274i56k9 是偶排列，则 i=__________k=__________**

【答案】i=8,k=3

16. **f(x)没有重根的充分必要条件是__________。**

【答案】(f(x),f'(x))=1

17. **设矩阵 A 中有一个 r 阶子式不为 0 则 r(A)__________，设矩阵 A 中所有的 r+1 阶子式全为 0 则 r(A)__________**

【答案】≥r，<r+1

18. **设 A=**$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则$A^*$ =__________

【答案】$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

19. **设 p(x)是不可约多项式，p(x)|f(x)g(x),则__________。**

【答案】p(x)|f(x)或 p(x)|g(x)

20. **若 f(x)|g(x)+h(x),f(x)|g(x)，则__________。**

【答案】f(x)|h(x)

21. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________

【答案】5

22. **设 A 为 5 级方阵，且|A|=2,则|-2A|=________。**

【答案】-64

23. **设 $f(x)=x^4+3x^2-kx+2$ 用 x-1 除余数为 3，则 k=________。**

【答案】3

24. $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$中$\varepsilon \neq 1$ $\quad \varepsilon^3=1$则$\triangle=$________。

【答案】0

25. **在秩为 r 的矩阵中，任意 r+1 级子式等于________。**

【答案】0

26. **已知 1-i 是 $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$ 的一个根，则 f(x)的全部根是________。**

【答案】1-i,1+i1+$\sqrt{2}$,1-$\sqrt{2}$

27. **设线性方程组 AX=B 有解，并且 AX=0 的基础解系为 X_1、X_2,特解为 X_0，则 AX=B 的任一解可表为________。**

【答案】$x_0+k_1x_1+k_2x_2$(k_1k_2 为任意数)

28. **设 A，B 为 n 阶可逆矩阵，则（AB）$^{-1}$=________。**

【答案】$B^{-1}A^{-1}$

29. **6 级行列式中，项 $a_{43}a_{32}a_{51}a_{14}a_{26}a_{56}$ 的符号为________。**

【答案】负

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$中$-2$的代数余子式是________

【答案】-4

31. **如果$(x^2-1)^2|x^4-3x^3+6x^2+ax+b$，则 a=________b=________。**

【答案】3,7

32. **如果排列 $i_1'i_2'\cdots in$ 的逆序数是 k,则排列 $in'_{n-1}\cdots l'_2l'_1$ 的逆序数是________。**

【答案】$\dfrac{n(n-1)}{2}$ -k

33．**设 A 为 5 级方阵，且|A|=1,则|-2A|=__________。**

【答案】-32

34．$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$中5的代数余子式是__________

【答案】-6

35．**若 p(x)|g(x)h(x),且__________则 p(x)|g(x)或 p(x)|h(x)。**

【答案】p(x)是不可约多项式

36．**若 f(x)|g(x),f(x)|h(x)，则__________。**

【答案】f(x)|g(x)+h(x)

37．**如果 f(x)=x^3-3x+k 有重根，那么 k=__________。**

【答案】±2

38．**n 级排列 u(n-1)…21 的逆序数是__________。**

【答案】$\frac{n(n-1)}{2}$

39．**在全部 n 级排列中，偶排列的个数为__________**

【答案】$\frac{n!}{1}$

40．**若 g(x)|f(x),h(x)|f(x)，且(g(x),h(x))=1，则__________。**

【答案】g(x)h(x)|f(x)

41．$\begin{vmatrix} x & x & x & a_1 \\ x & x & a_2 & 0 \\ x & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$__________

【答案】$a_1a_2a_3a_4$

42．**若 n 元齐次线性方程组 AX=0 满足 r(A)=r，则 AX=0 的基础解系中有__________个解向量。**

【答案】n-r

2024 年中国矿业大学（北京）802 高等代数之《高等代数》考研题库[仿真+强化+冲刺]

2024 年中国矿业大学（北京）802 高等代数之《高等代数》考研仿真五套模拟题

2024 年高等代数五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、填空题

1． $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，$g(x)=x^3+x^2-x-1$的最大公因式（$f(x)g(x)$）=__________.

【答案】x+1

2． 已知 4 元非齐次方程组$Ax=b$系数矩阵A的秩为 3，又已知β_1，β_2，β_3是它三个不同的解向量，其中$\beta_1+\beta_2=(1,1,0,2)^T$，$\beta_2+\beta_3=(1,0,1,3)^T$，则$Ax=b$的通解为__________.

【答案】通解为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1)^T+k(0,-1,1,1)^T,k\in P$，或者$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{3}{2})^T+k(0,-1,1,1)^T,k\in P$

3． 设A是n阶方阵，且$|A|=2$，则$\left|\left(-\frac{1}{4}A\right)^{-1}+A^*\right|$=__________.

【答案】$(-1)^n2^{n-1}$（）

4． 若不可约多项式$p(x)$是$f^{(k)}(x)$的 s 重因子，且$p(x)|f(x)$，那么$p(x)$__________$f(x)$的$s+k$重因子.

【答案】不一定

【解析】对于满足题目条件的$p(x)$，使得$p(x)$是$f(x)$的$s+k$重因子的例子显然可得.

对于它的反例，考虑有理数域上的多项式

$$f(x)=x^4+6x^2+5$$

它的二阶导数为

$$f''(x)=12(x^2+1)$$

显然，有理数域上的不可约多项式$p(x)=x^2+1$是$f''(x)$的 1 重因子，且$p(x)|f(x)$，但$p(x)$显然不是$f(x)$的 1+2=3

重因子.

5． 设 A 是可逆矩阵，λ是 A 的一个特征值，则 A 的伴随矩阵A^*一定有一个特征值为__________.

【答案】$\frac{1}{\lambda}|A|$

6． 设 3 维欧氏空间中一组基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的度量矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则向量$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$的长度$|\beta|$为__________.

【答案】$\sqrt{13}$

二、计算题

7． 设A为正定矩阵，证明：

(1) A^{-1}, $kA(k>0)$, A^m（m为整数），A^*均正定；

(2) $g(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$，若$a_i\geqslant0(i=0,1,\cdots,m)$且至少有一个为正，则$g(A)$正定.

【答案】(1)因为A正定，所以A的特征值$\lambda_i>0,i=1,\cdots,n$，且A实对称，及A可逆，则$(A^{-1})'=(A')^{-1}=A^{-1}$，所以$A^{-1}$实对称. 又$A^{-1}$的特征值$\mu_i=\lambda_i^{-1}>0$，$i=1,\cdots,n$，故$A^{-1}$正定；

易见 KA 实对称，其特征值为$k\lambda_1$，$k\lambda_2$，…，$k\lambda_n$。>0)全大于零，故 KA 正定；

易见 A^m 实对称，其特征值为λ_1^m，λ_2^m，…，λ_m^m全大于零，故A^m正定.

$A^* = |A|A^{-1}$当然正定.

(2)由题设易见 $g(4)$实对称，且$g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，…，$g(\lambda_n)$全大于零，则 $g(A)$正定.

8. **设线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解，求 α 的值及所有公共解.

【答案】解法 1 因方程组①与方程组②有公共解，即如下联立方程组③有解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_2=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1. \end{cases} \qquad ③$$

对方程组③的增广阵$\bar{A}$施以初等行变换，有

$$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right)\triangleq B$$

由于方程组③有解，故其系数阵与增广阵等秩，于是（A-1）（A-2）=0,即 A=1 或 A=2.

当 A=1 时

$$B=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

因此,方程组①与方程组②的公共解为$X=k(-1,0,1)'$，其中人为任意常数.

当 A=2 时

$$B=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

因此,方程组①与方程组②的公共解为

$$X=(0,1,-1)'$$

解法 2 方程组①的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix}=(a-1)(a-2)$$

当$a\neq1$，$a\neq2$时，方程组①只有零解，但此时$x=(0,0,0)'$不是方程组②的解.

当 A=1 时，对方程组①的系数矩阵施以初等行变换，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，方程组①的通解为$x=k(-1,0,1)'$，k为任意常数，此解也满足方程组②，所以方程组①与方程组②的所有公共解为

$$X=k(-1,0,1)',\ k\text{为任意常数}.$$

当A=2时，对方程组①的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此，方程组①的通解为

$$x=k(0,-1,1)',\ k\text{为任意常数}.$$

将此解代入方程组②，得$k=-1$，所以方程组①与方程组②的所有公共解为$x=(0,1,-1)'$

9．**设V为数域P上n维线性空间，$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$为线性变换且满足$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，又设$\lambda_0$是$\mathscr{A}$的一个特征值，则**

(1) $V^{\lambda_0}=\{\alpha\in V\mid$ 存在正整数m，使$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m(\alpha)=\theta\}$是$\mathscr{A}$的不变子空间，其中$\mathscr{E}$是单位变换，

(2) V^{λ_0}也是$\mathscr{B}$的不变子空间.

【答案】(1) 首先若$g(x),f(x)\in P[x]$，则有$f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=g(\mathscr{A})f(\mathscr{A})$

对$\forall\xi\in V^{\lambda_0}$，存在$m\in N$，使$(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})^m(\xi)=\theta$. 从而

$$(\mathscr{A}-\lambda_0 E)^m(\mathscr{A}(\xi))=\mathscr{A}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m(\xi)=\mathscr{A}(\theta)=\theta$$

故$\mathscr{A}(\xi)\in V^{\lambda_0}$，即证$V^{\lambda_0}$是$\mathscr{A}$的不变子空间.（）

（2）已知$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，设$\alpha\in V^{\lambda_0}$，则存在$r\in N$，使$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^r(\alpha)=\theta$，从而

$$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^r\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{B}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^r(\alpha)=\mathscr{B}(\theta)=\theta$$

故$\mathscr{B}(\alpha)\in V^{\lambda_0}$. 此即$V^{\lambda_0}$是$\mathscr{B}$的不变子空间.

10．**求P^3中标准基e_1，e_2，e_3，在基$(1,1,1)^T$，$(1,0,1)^T$，$(0,1,1,)^T$下的坐标. 进一步，求线性变换$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)^T=(4x_1+x_2-x_3,x_1+2x_3,2x_2+3x_3)^T$在这组基下的矩阵.**

【答案】标准基$e_1=(1,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0)^T$，$e_3=(0,0,1)^T$，令$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,1,)^T$，则有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)A$$

故

$$(e_1,e_2,e_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

所以标准基e_1，e_2，e_3在基α_1，α_2，α_3下的坐标分别为$(1,0,-1)^T$，$(1,-1,0)^T$和$(-1,1,1)^T$

因为

$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)^T=(4x_1+x_2-x_3,x_1+2x_3,2x_2+3x_3)^T$，

故

$$\mathscr{A}\alpha_1=\mathscr{A}(1,1,1)^T=(4,3,5)^T,\ \mathscr{A}\alpha_2$$
$$=\mathscr{A}(1,0,1)^T=(3,3,3)^T,\mathscr{A}\alpha_3=\mathscr{A}(0,1,1)^T=(0,2,5)^T,$$

故

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}4&3&0\\3&3&2\\5&3&5\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}\begin{pmatrix}4&3&0\\3&3&2\\5&3&5\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&0\\3&3&2\\5&3&5\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&-3\\2&0&3\\1&0&5\end{pmatrix}$$

因此线性变换$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

11．设$f(x)=x^3+3x^2+3\in\mathbf{Q}[x]$，α是$f(x)$在复数域$C$内的一个根，记$\mathbf{Q}[\alpha]=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 | a_0,a_1,a_2\in\mathbf{Q}\}$

证明：(1) $\forall g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，有$g(\alpha)\in\mathbf{Q}[\alpha]$；(2) $\forall 0\neq\beta\in\mathbf{Q}[\alpha]$，则$\exists\gamma\in\mathbf{Q}[\alpha]$，使$\beta\gamma=1$

【答案】(1) $\forall g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，由带余除法得$g(x)=f(x)q(x)+r(x)$，其中$r(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，

$$q(x)\in\mathbf{Q}[x]\Rightarrow g(\alpha)=f(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2\in\mathbf{Q}[\alpha]$$

(2)取p=3，由艾森施坦因判别法可知，$f(x)$在Q上不可约，则$\forall g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，$f(x)|g(x)$，或$(f(x),g(x))=1$。

$$\forall 0\neq\beta\in\mathbf{Q}[\alpha],\ \exists g(x)\in\mathbf{Q}[x],$$

使得

$$\forall 0\neq\beta=g(\alpha),$$

又$f(\alpha)=0$，所以$f(x)\nmid g(x)$，

因此

$$(f(x),g(x))=1,$$

故

$$\exists u(x),h(x)\in\mathbf{Q}[x],$$

使

$$f(x)u(x)+g(x)h(x)=1\Rightarrow g(\alpha)h(\alpha)=1$$

即$\exists\gamma=h(\alpha)\in\mathbf{Q}[\alpha]$，使$\beta\gamma=1$

12．设$\alpha=(1,1,1,1)$，$\beta=(1,-1,1,1)$

（1）求2α的长度；

（2）求α与β的夹角；

（3）求α与β的距离；

（4）求α在β上的正交投影及α到β的距离.

【答案】（1）2α的长度

$$\|2\alpha\|=\sqrt{2^2+2^2+2^2+2^2}=4$$

（2）α与β的夹角为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}=\arccos\frac{2}{4}=\frac{\pi}{3}$$

（3）α与β的距离为

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|=\sqrt{2^2}=2$$

（4）α在β上的正交投影为

$$\mathrm{Pr}_\beta(\alpha)=\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta=\frac{2}{4}(1,-1,1,1)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

所以α到β的距离为

$$\|\alpha-\mathrm{Pr}_\beta(\alpha)\|=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(1+\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{3}$$