全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年北京大学

630高等数学与地质学基础考研精品资料

策划：辅导资料编写组

【初试】2024年北京大学630高等数学与地质学基础考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清PDF电子版支持打印，考研首选资料。

一、北京大学630高等数学与地质学基础考研真题汇编

1. 北京大学630高等数学与地质学基础2004-2006、回忆版2010、2015年考研真题，暂无答案

说明：分析历年考研真题可以把握出题脉络，了解考题难度、风格，侧重点等，为考研复习指明方向。

二、2024年北京大学630高等数学与地质学基础考研资料

2. 《高等数学》考研相关资料

（1）《高等数学》[笔记+课件+提纲]

①北京大学630高等数学与地质学基础之《高等数学》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段首选资料。

②北京大学630高等数学与地质学基础之《高等数学》本科生课件。

说明：参考书配套授课PPT课件，条理清晰，内容详尽，版权归属制作教师，本项免费赠送。

③北京大学630高等数学与地质学基础之《高等数学》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《高等数学》考研核心题库（含答案）

①北京大学630高等数学与地质学基础考研核心题库之解答题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习首选资料。

（3）《高等数学》考研模拟题[仿真+强化+冲刺]

①2024年北京大学630高等数学与地质学基础考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024年北京大学630高等数学与地质学基础考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习首选。

③2024年北京大学630高等数学与地质学基础考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺首选资料。

3. 《普通地质学》考研相关资料

（1）《普通地质学》[笔记+提纲]

①2024年北京大学630高等数学与地质学基础之《普通地质学》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段必备资料。

②2024年北京大学630高等数学与地质学基础之《普通地质学》考研知识点纲要。

说明：该科目复习考试范围框架，汇总出了考试知识点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《普通地质学》考研题库[仿真+强化+冲刺]

①2024年北京大学630高等数学与地质学基础之普通地质学考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024年北京大学630高等数学与地质学基础之普通地质学考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习必备。

③2024年北京大学630高等数学与地质学基础之普通地质学考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺必备资料。

三、电子版资料全国统一零售价

4．**本套考研资料包含以上一、二部分（高清PDF电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]**

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5．**北京大学630高等数学与地质学基础考研初试参考书**

同济大学数学系《高等数学》

吴泰然《普通地质学》

五、本套考研资料适用学院和专业

地球与空间科学学院：矿物学、岩石学、矿床学/地球化学/古生物学与地层学/构造地质学/地质学（石油地质学）

版权声明

目录

2024 年北京大学 630 高等数学与地质学基础备考信息

北京大学 630 高等数学与地质学基础考研初试参考书目

同济大学数学系《高等数学》

吴泰然《普通地质学》

北京大学 630 高等数学与地质学基础考研招生适用院系

地球与空间科学学院：矿物学、岩石学、矿床学/地球化学/古生物学与地层学/构造地质学/地质学（石油地质学）

北京大学 630 高等数学与地质学基础历年真题汇编

北京大学 630 高等数学与地质学基础 2015 年考研真题（回忆版）

2015 年北京大学高等数学与地质学基础回考研真题

第一部分 高等数学 75 分

1.计算题:5 个积分 20 分

2 求曲线 x1/2+y1/2=a1/2（x,y>0）上任一点切线的截距之和 10 分

3 已知 y 与 x 关系式,求关于 y 的二阶导,一阶导的加减乘除 10 分

4 给 y=ex 、y=e-x 、x=1,求面积 10 分

5 一个微分方程,求通解 10 分

6 已知锥面 z2=x2+y2 与平面 z=1 围区域 D,求三重积分

∫∫∫[1/(1+x2+y2)]dv 15 分

D

第二部分 地质学基础 75 分

1 名词解释 20=10*2

标准化石 上层滞水 竖直褶皱 地质作用 不整合 侵蚀基准面 岩墙. 节理 波切台 。。。

2 判断题 10=10*1

有一个侏罗纪地质年代判断题、岩溶定义、地震的要素、风的磨蚀作用。。。。

3.简答题 30=5*6

影响风化作用类型和速率的因素

三角洲与冲积扇的异同点

冰川沉积作用类型及特点

大西洋型大陆边缘各地貌示意图及成因

为什么地球经过数百年的侵蚀还未削平？请列举具体原因

4 论述题 15

论述海洋环境分带性及其特征

2010 年北京大学 611 高等数学与地质学基础考研试题（回忆版）

学院：地球与空间科学学院

第一部分是高数
第一大题是 5 个计算题，分别是求极限，倒数，不定积分，定积分。
（5 分一道）
后面大题好像都是 10 分一道。
第二大题，不记得
第三大题，这个是求二重积分。
第四大题，这个是求一曲线 y=-X 平方+4x-3 与其在点（0，-3）与（3，0）处切线所围得面积，
第五大题，这个是说某曲线的切线段在 2 轴间被切点平分，然后　　给了一个点　，求此曲线方程。
第六大题，是说　　一轮船突然熄火了，开始速度 10KM/h，20 秒后减到 6KM/H,阻力与速度成正比，求 2 分钟后船的速度。

第二部分是地质学
第一大题是 10 个名词解释，2 分一个，总共 20 分。
第二大题是 10 个正误判断，1 分一个，共 10 分。
第三大题是 5 个简答题，6 分一个，总共 30 分。
1、怎么区别石英与方解石
2、大型断裂带的标志
3、洪积冲积扇的特点
4、变质作用的特点
5、湖成沉积物的特征
（题日没错，顺序可能有误）
第四大题是一道论述题，论述内外动力地质作用是怎么相互作用的。

北京大学 630 高等数学与地质学基础 2006 年考研真题

启用前机密　　北京大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学与地质学基础　考试时间：2006年1月15日上午
招生专业：各专业　研究方向：

说明：答题一律写在答题纸上（含填空题、选择题等客观题），写在此页上无效。

高等数学部分

一、计算下列各题（每题 5 分，共 25 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$；　3. 求不定积分 $\int\dfrac{\ln^3 x}{x^2}dx$；

4. $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$，求 y'；　5. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x dx$.

二、试写出曲线 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 与横轴交点处的切线方程.（10 分）

三、圆 $r\le 1$ 被心形线 $r=1+\cos\theta$ 分割成两部分，试求这两部分各自的面积.（10 分）

四、一拉紧的弹簧所受的拉力与伸成成正比，长度伸长 1cm，拉力为 1kg. 现有 2kg 的物体悬挂在弹簧下端，待其平衡后向下稍拉后放开，试求由此产生的振动周期.（15 分）

五、一物体由两个半径分别为 R 和 r（0<r<1<R）的同心球组成，已知材料的密度与到球心的距离成反比，且在距离圆心等于 1 处的密度为 ρ，求该物体的质量.（15 分）

2024年北京大学630高等数学与地质学基础考研核心笔记

《高等数学》考研核心笔记

第1章　函数与极限

考研提纲及考试要求

考点：集合
考点：映射
考点：函数
考点：数列的概念
考点：数列的几何意义

考研核心笔记

【核心笔记】映射与函数

1.集合

（1）集合概念：

集合（简称集）：集合是指具有某种特定性质的事物的总体。用A，B，M等表示。

元素：组成集合的事物称为集合的元素。a是集合M的元素表示为a∈M。

集合的表示：

列举法：把集合的全体元素一一列举出来。

描述法：若集合M是由元素具有某种性质P的元素x的全体所组成，则M可表示为：

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,$M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$。

几个数集：

N表示所有自然数构成的集合，称为自然数集。

N={0，1，2，· · ·，n，· · ·}。N^+={1，2，· · ·，n，· · ·}。

R表示所有实数构成的集合，称为实数集。

Z表示所有整数构成的集合，称为整数集。

Z={· · ·，–n，· · ·，–2，–1，0，1，2，· · ·，n，· · ·}。

Q表示所有有理数构成的集合，称为有理数集。

$$\boldsymbol{Q}=\{\frac{p}{q}|p\in Z,q\in \boldsymbol{N}^+\text{且}p\text{与}q\text{互质}\}$$

子集：若x∈A，则必有x∈B，则称A是B的子集，记为A⊂B（读作A包含于B）或B⊃A

如果集合A与集合B互为子集，A⊂B且B⊂A，则称集合A与集合B相等，记作A=B

若A⊂B且A≠B，则称A是B的真子集，记作A⫋B。

例如，N⫋Z⫋Q⫋R

不含任何元素的集合称为空集，记作∅。规定空集是任何集合的子集。

（2）集合的运算

设A、B是两个集合，由所有属于A或者属于B的元素组成的集合称为A与B的并集（简称并），记作A∪B，即：A∪B={x|x∈A或x∈B}。

设A、B是两个集合，由所有既属于A又属于B的元素组成的集合称为A与B的交集（简称交），

记作 $A\cap B$，即：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\backslash B$，即：$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$。

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集。此时，我们称集合 I 为全集或基本集。称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 AC。

集合运算的法则：

设 A、B、C 为任意三个集合，则

①交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

②结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

③分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

④对偶律 $(A\cup B)C=AC\cap BC$，$(A\cap B)C=AC\cup BC$。

$(A\cup B)C=AC\cap BC$ 的证明：

$x\in(A\cup B)C\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in AC$ 且 $x\in BC\Leftrightarrow x\in AC\cap BC$，所以 $(A\cup B)C=AC\cap BC$。

直积（笛卡儿乘积）：

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对（x，y），把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$A\times B=\{(x,y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$。

（3）区间和邻域

有限区间：设 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记为（a，b），即：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$。

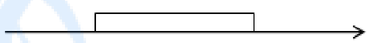
类似地有：

$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$、$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$ 称为半开区间。

其中 a 和 b 称为区间（a，b）、[a，b]、[a，b）、（a，b]的端点，$b-a$ 称为区间的长度。

无限区间：$[a,+\infty)=\{x|a\le x\}$，$(-\infty,b]=\{x|x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$。

区间在数轴上的表示：



邻域：以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 U（a）。

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$。

即：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$。

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

2.映射

（1）映射的概念

定义设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作：$f: X\to Y$。

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 f（x），即：$y=f(x)$。

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即：$D_f=X$。

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记为 R_f，或 f（X），即：$R_f=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$。

需要注意的问题：

①构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应。

②对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$。

③f：$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$，对每个 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$f(x)=\sin x$。

f 是一个映射，定义域 $Df=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，值域 $Rf=[-1,1]$。

满射、单射和双射：

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）。

（2）逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是，我们可定义一个从 Rf 到 X 的新映射 g，即：$g: R_f\to X$。

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$。这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$。

按上述定义，只有单射才存在逆映射。上述三例中哪个映射存在逆映射？

设有两个映射：

$$g: X\to Y_1,\quad f: Y_2\to Z$$

其中 $Y_1\subset Y_2$。则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f[g(x)]\in Z$。显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 fog，即

$$fog: X\to Z,\quad (fog)(x)=f[g(x)],\ x\in X$$

应注意的问题：

映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，$R_g\subset D_f$。否则，不能构成复合映射。由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，fog 有意义并不表示 gof 也有意义。即使 fog 与 gof 都有意义，复映射 fog 与 gof 也未必相同。

3.函数

（1）函数概念

定义设数集 $D\subset R$，则称映射 $f: D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为：$y=f(x)$，$x\in D$，

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$。

应注意的问题：

记号 f 和 f（x）的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f。

函数符号：函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母，例如“F”，“φ”等。此时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$。

函数的两要素：

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 R 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f。如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

函数的定义域：

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定。例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 t=0，落

地的时刻 t=T，则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \ t\in[0, T]。$$

这个函数的定义域就是区间[0，T]；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“y=f（x）”表达，而不必再表出 D_f。

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间[–1，1]，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间（–1，1）。

单值函数与多值函数：

在函数的定义中，对每个 x∈D，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数。如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 x∈D，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个多值函数。

例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出。显然，对每个 x∈[–r，r]，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 x=r 或 x=–r 时，对应 y=0 一个值；当 x 取（–r，r）内任一个值时，对应的 y 有两个值。所以这方程确定了一个多值函数。

对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支。

例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“y≥0”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 y≥0”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“y≤0”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 y≤0”作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$。

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），这在中学里大家已经熟悉。其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

{P（x，y）|y=f（x），x∈D}

称为函数 y=f（x），x∈D 的图形。图中的 Rf 表示函数 y=f（x）的值域。

（2）函数的几种特性

①函数的有界性

设函数 f（x）的定义域为 D，数集 X⊂D。如果存在数 K_1，使对任一 x∈X，有 f（x）≤K_1，则称函数 f（x）在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 f（x）在 X 上的一个上界。图形特点是 y=f（x）的图形在直线 y=K_1 的下方。

如果存在数 K_2，使对任一 x∈X，有 f（x）≥K_2，则称函数 f（x）在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 f（x）在 X 上的一个下界。图形特点是，函数 y=f（x）的图形在直线 y=K2 的上方。

如果存在正数 M，使对任一 x∈X，有|f（x）|≤M，则称函数 f（x）在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 f（x）在 X 上无界。图形特点是，函数 y=f（x）的图形在直线 y=–-M 和 y=M 的之间。

函数 f（x）无界，就是说对任何 M，总存在 x_1∈X，使|f（x）|>M。

②函数的单调性

设函数 y=f（x）的定义域为 D，区间 I⊂D。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 f（x_1）<f（x_2）

则称函数 f（x）在区间 I 上是单调增加的。

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 f（x_1）>f（x_2），则称函数 f（x）在区间 I 上是单调减少的。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

③函数的奇偶性

《普通地质学》考研核心笔记

第 1 章　绪论

考研提纲及考试要求

考点：地质学的研究对象、内容和意义
考点：地质学的研究方法
考点：地质学的分支学科和相关学科
考点：普通地质学的任务

考研核心笔记

【核心笔记】地质学的研究对象、内容和意义

（1）地质学的研究对象是地球（图 1-3），其范围包括了从地核到外层大气的整个地球，但主要是固体地球部分。随着地球科学的发展，地质学的研究对象也在发生变化。

图 1-3　从月球上拍摄的地球照片

（2）地质学研究的内容可以概括为三个主要方面：
①地球的物质组成和结构构造；
②地球的形成和演化；
③研究地质学与社会经济发展相适应的实用技术。
地球的物质组成主要研究元素、矿物、岩石、建造甚至是构造单元以及它们的行为特征（图 1-4）

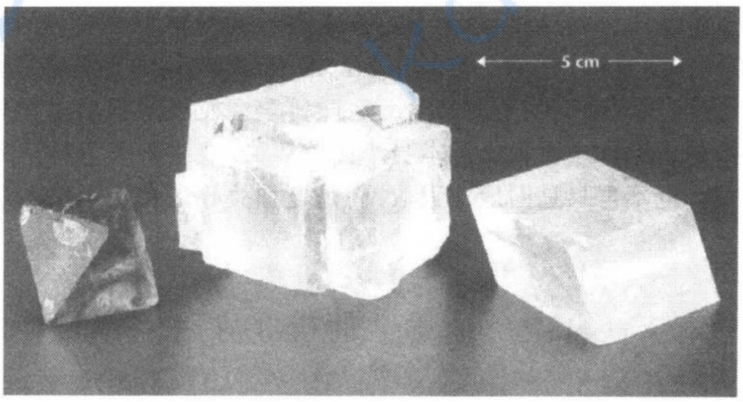


图 1-4　构成地壳岩石的基础——矿物

（3）地质学首先是自然科学的组成部分，其研究结果对自然辩证法体系的完整性也有重要的意义，恩格斯在《自然辩证法》中就高度评价了赖尔和达尔文的工作。

地质学研究更重要的意义在于服务社会经济的发展。

（4）1993 年美国国家研究委员会也编写了《固体地球科学与社会〉一书，为 21 世纪的地球科学提出了四个目标：

①了解所有研究领域的各种作用过程；

②满足自然资源的需求；

③减轻地质灾害；

④调节和缩小全球变化的影响。

【核心笔记】地质学的研究方法

（1）大多数地质学分支学科的研究工作是从野外调查开始的，传统的野外地质调查所使用的工具是被地质工作者称为老三件的锤子、罗盘、放大镜。今天的野外地质装备已经发生了巨大的改变，笔记本电脑、数码相机、手执 GPS 已经成为新三件，甚至更先进的卫星电话、现场成像系统等（图 1-6）.

图 1-6　现场成像信息系统

（2）野外地质工作的主要任务有三项：

①确定地质体之间的空间关系；

②确定地质事件发生的时间关系；

③采集典型的野外标本。

完成野外工作以后，大部分地质学分支学科还需要进行室内的分析研究工作，对岩石样品各种物理、化学指标的分析。

（3）室内外研究只是地质学研究的基础，地质学研究的整个过程应该包括如下的步骤：

证　据 → 推　理 → 模　拟 → 结　论

【核心笔记】地质学的分支学科和相关学科

从地质学各主要分支学科研究的内容看，大致可以把地质学划分为下列几个大的领域：

（1）研究地球物质组成的学科（如岩石学、矿物学、晶体光学等）；

（2）研究地球结构、构造的学科（如显微构造学、构造地质学、大地构造学等）；

（3）研究地球演化历史的学科（如古生物学、地层学、地史学等）；

（4）综合性学科（如区域地质学、海洋地质学、环境地质学等）；

（5）应用性学科（如矿床地质学、石油地质学、灾害地质学等）；

（5）研究新技术的学科（如遥感地质学、数学地质学、信息地质学等）。

【核心笔记】普通地质学的任务

（1）地质学的主要特点可以归纳为以下三个方面：

①归纳式的逻辑推理；

②大跨度的空间和时间尺度；

③结论的不确定性。

（2）解决这一问题的途径有两种办法：

①进行多角度、多学科的综合研究，以获得最合理的结论；

②依靠资料的不断积累和更新，依靠科学技术的发展去获得更精确的资料，使结论越来越接近事实。

第 2 章 宇宙、太阳系和地球

考研提纲及考试要求

考点：宇宙起源的哲学观
考点：大爆炸理论
考点：星系的演化
考点：太阳系的构成
考点：太阳系起源问题的假说
考点：太阳系的其他天体
考点：地球的早期演化

考研核心笔记

【核心笔记】宇宙的起源

（1）宇宙的起源历来是天文学家和广大的科学爱好者所关注的问题。

①传说远古时期，天地形成之前到处是一片混沌，分不出东西南北，在这一片混沌的中间孕育了人类始祖盘古氏，盘古开天辟地的传说代表了古代中国人对宇宙起源朴素的理解。

②古印度人认为，世界像球面的一部分，由几头巨兽驮着，巨象站在海龟的背上，海龟又骑在盘卷成一团的巨蛇上面，高高的塔尖就是高耸入云的山峰（图 2-2）。

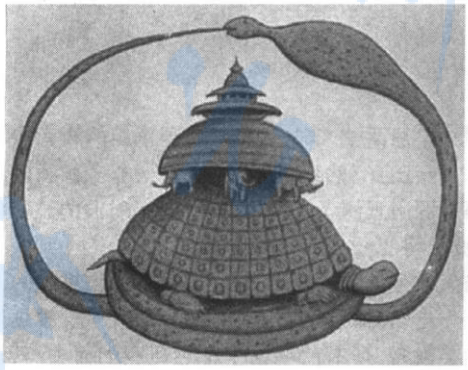


图 2-2 古印度人对宇宙的认识

③古埃及人则认为他们居住的地方是四周环绕高山的谷底，天被山峰支撑着，天的形态好像屋顶，星星是悬挂在屋梁上的油灯（图 2-3）

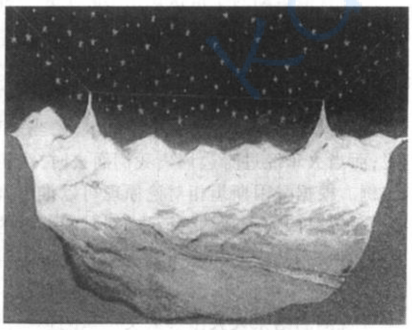


图 2-3 古埃及人对宇宙的认识

1. 宇宙起源的哲学观

（1）关于宇宙的起源，我国古代著名思想家李聃的一段话历来为研究宇宙起源的科学家所推崇，《老子》曰：“有物混成，先天地生，寂兮寥兮，独立不改，周行而不殆，可以为天地母。吾不知其名，字之

2024 年北京大学 630 高等数学与地质学基础考研辅导课件

《高等数学》考研辅导课件

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、集合

1、概念 $\boxed{\text{具有某种特定性质的事物的总体;}}$

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

元素a属于集合M，记作 a P M

元素a不属于集合M，记作 $a \in M$

2、集合的表示法

列举法 A © $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

描述法 M ©$\{x|x$所具有的特征$\}$

3、集合间的关系

若$x \in A$,则必$x \in B$,就说A是B的子集. 记作 A T B.

例1 数集 N----自然数集 Z----整数集

Q----有理数集 R----实数集

它们间关系: N T Z, Z T Q, Q T R.

若A T B,且B T A,就称集合A与B相等. (A © B)

例2 A © $\{1,2\}$, C ©$\{x|x^2$ ʃ$3x$ J 2 ©$0\}$,

则 A © C .

不含任何元素的集合称为空集，记作 Z

例如, $\{x|x$ P R, x^2 J 1 ©$0\} = \varnothing$

规定 空集为任何集合的子集.

4、运算

设A、B是两集合, 则

交 "AΨB" E $\{x$χxPA且xP$B\}$

并 "AΞB" E $\{x$χxPA或xP$B\}$

差 "$A-B$" E $\{x$χxPA但xΘ$B\}$

补（余）A^c E $I-A$（其中 I 为全集）.

5、其运算律

(1) A Ψ $B = B$ Ψ A A Ξ $B = B$ Ξ A

(2) $(A$ Ξ$B)$ Ξ $C = A$ Ξ $(B$ Ξ $C)$

$(A$ Ψ $B) = A$ Ψ $(B$ Ψ $C)$

(3) $(A$ Ξ $B)$ Ψ $C = (A$ Ψ $C)$ Ξ $(B$ Ψ $C)$

$(A$ Ψ $B)$ Ξ $C = (A$ Ξ $C)$ Ψ $(B$ Ξ $C)$

(4) $(A$ Ψ $B)^c$ ©A^c Ξ B^c, $(A$ Ξ $B)^c$ ©A^C Ψ B^C

注:

A与B的直积 AλB E $\{(x, y)$χxPA 且 yP$B\}$

例如: Rλ$R = \{(x, y)$χxPR 且 yP$R\}$

表示xoy面上全体点的集合

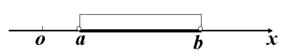
RλR常记为R^2

2、区间

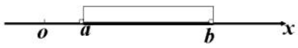
是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

J a, bP R, 且a ™ b.

$\{x|a$ ™x ™$b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b)



{x|a } x } b} 称为闭区间，记作 [a,b]



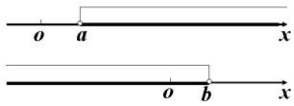
{x|a } x ™b} 称为半开区间，记作 [a,b)

{x|a ™x } b} 称为半开区间，记作 (a,b]

有限区间

无限区间：

[a,╯{) ©{x|a } x}　　(ʃ{ ,b) ©{x|x ™b}



区间长度的定义：

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

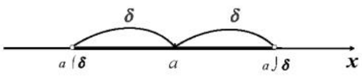
3、邻域

设a与δ是两个实数，且δ ® 0.

数集{x| |x ʃa| ™δ}称为点a的δ邻域，

点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径.

记作　$U_\delta(a)$ ©{x| a ʃδ ™x ™a ╯δ }.



点a的去心的δ邻域，记作$U_\delta^0(a)$.

$U_\delta^0(a)$ ©{x | 0 ™|x ʃa| ™δ}

注意：邻域总是开集。

二、映射

1、概念

设X,Y是两个非空集合,如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称f为从X到Y的映射. 记作 $f: X\to Y$.

其中y称为元素x(在映射f下)的像，记作f(x)，即y=f(x)

元素x称为元素y(在映射f下)的原像

集合X称为映射f的定义域,记作D_f,即D_f=X

X中所有元素的像所组成的集合称为映射f的值域，记作R_f或f(X)，即 R_f ©f(X) ©{f(x)| x P X}.

注:

1' 构成映射的三个要素:

集合X,即定义域D_f=X;

集合Y,即值域的范围:$R_f \subset Y$;

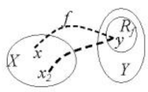
对应法则f,使对每个x∈X,有唯一确定的y=f(x)与之对应.

2' 对每个x∈X,元素x的像是唯一的;

而对每个y∈R_f,元素y的原像不一定是唯一的;

映射f的值域R_f是Y的一个子集，即$R_f \subset Y$，不一定R_f=Y.

但定义域一定等于集合X.



例3　设f:R→R,对每个x∈R, f(x) = x_2.

显然，f是一个映射，f的定义域D_f=R值域R_f= { y | y≥0}，它是R的一个真子集. 对于R_f中的元素y,除y=0外,它的原像不是唯一的. 如 y = 4的原像就有 x = 2，x = -2两个.

例4　设 X ={(x,y)|x^2+y^2=1},Y={(x,0)||x|≤1}，f :X→Y,对每个(x,y)∈X，值域R_f= Y.

在几何上,这个映射表示把平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到x轴的区间[-1,1]上.

定义 设f是从集合X到集合Y的映射,若$R_f=Y$,即Y中任一元素y都是X中某元素的像,则称f为X到Y上的映射或满射;

若对X中任意两个不同元素$x_1 \neq x_2$它们的像$f(x_1) \neq f(x_2)$,则称f为X到Y的单射(或"如果$f(x_1)=f(x_2)$,就有$x_1=x_2$);

若映射f既是单射,又是满射,则称f为一一映射(或双射).

例4中的映射,既非满射($y=-2$,不是X中的某元素的像),又非单射($x_1=2, x_2=-2$,它们的像相等).

例5的映射不是单射,是满射.($Y[-1,1]$表示满射,

$X:(x=0, y=1) \rightarrow Y:(0,0)$ $X:(x=0, y=-1) \rightarrow Y:(0,0)$);

映射又称算子,在不同的数学分支中,有不同的惯用名称:

从非空集X到数集Y的映射称为X上的泛函.

从非空集X到它自身的映射又称为X上的变换.

从实数集X到实数集Y的映射通常称为定义在X上的函数.

2. 逆映射与复合映射

1)逆映射

设f是X到Y的单射,则对每个$y \in R_f$,有唯一的$x \in X$适合$f(x)=y$,定义一个新的映射$g:R_f \rightarrow X$,对每个$y \in R_f$,规定$g(y)=x$,这x满足$f(x)=y$.

这个映射g称为f的逆映射,记作f^{-1}.

定义域$D_{f^{-1}}=R_f$,值域$R_{f^{-1}}=X$

注:只有单射才存在逆映射.

因为从X→Y对Y要求唯一的,而Y→X又是唯一的,故只有单射.

2)复合映射

设有两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1,\ f: Y_2 \rightarrow Z \qquad (Y_1 \subset Y_2)$$

则由g和f可确定了一个从X到Z的映射,它将每个$x \in X$映成$f[g(x)] \in Z$,这个映射称为映射g和f构成的复合映射,记作$f \cdot g$,即

$$f \cdot g: X \rightarrow Z$$

$$(f \cdot g)(x)=f[g(x)],\quad x \in X$$

注 1° 映射g和f构成复合映射的条件:

g的值域R_g必须包含在f的定义域内,即$R_g \subset D_f$.否则,不能构成复合映射.

2° 映射g和f的复合是有顺序的:

$f \cdot g$有意义并不表示$g \cdot f$也有意义.即使$f \cdot g$与$g \cdot f$都有意义,复合映射$g \cdot f$和$f \cdot g$也不一定相同.

例5 f是X到Y上可逆映射的充分必要条件是f为X到Y的双射.

证明:充分性(由条件推出结果)

设f是$X \rightarrow Y$的双射.在Y上任一元素y必定存在唯一的$x \in X$,使$y=f(x)$. (1)

从$Y \rightarrow X$的映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$. (2)

对任何$x\in X$, 由(1),(2)可得

$f-1f(x)=f-1(f(x))=f-1(y)=x$. 即$f-1f=Ix$

反之. 对任何$y\in Y$, 由(2), (1)可得

$ff-1(y)=f(f-1(y))=f(x)=y$. 即$ff-1=Iy$

必要性(由结果推出条件)

f是可逆的,存在f^{-1}: $Y\to X$ 使$f^{-1}f=I_x$, $ff^{-1}=I_y$

对X中任意两个元素x_1, x_2, 当$f(x_1)=f(x_2)$时

$x_1=f^{-1}f(x_1)=f^{-1}(f(x_1))=f^{-1}(f(x_2))=f^{-1}f(x_2)=x_2$

f是单射

另一方面, 对任意$y\in Y$, $y=ff^{-1}(y)=f(f^{-1}(y))$ (3)

由(3)我们得到$f(X)=Y$, 则f是$X\to Y$ 的双射.

例6 设 $f(x)©\sqrt{x^2⌠1}, g(x)©\sqrt{1⌠x^2}$, 求

$f[g(x)]$及$g[f(x)]$

∵ $f(x)$的定义域D_1 ©(⌠{ , ⌠1)Ξ (1,⌡{),

$g(x)$的定义域D_2 ©[⌠1,1],

$g(x)$的值域w_2 ©[0,1],⊗ D_1 Ψ w_2 ©{1}

⊗ $f[g(x)]$的定义域I ©{x | $g(x)$ ©1} ©{0}

⊗ $f[g(x)]$ ©0 x P {0}

$g[f(x)]$是$g(u)$与u ©$f(x)$的复合,

∵ $f(x)$的值域w_1 ©[0,⌡{),

⊗ D_2 Ψ w_1 ©[0,1],

于是$g[f(x)]$的定义域

J ©{x | $f(x)$P [0,1]} ©{x | 0 } $\sqrt{x^2⌠1}$ } 1}

©{x | 1 } $|x|$ } $\sqrt{2}$}

⊗ $g[f(x)]$ ©$\sqrt{1⌠(x^2⌠1)}$ ©$\sqrt{2⌠x^2}$ 1 } $|x|$ } $\sqrt{2}$

三、函数

1、函数概念

定义1 设数集DT R,则称映射$f: D\to R$为定义在D上的函数，记作 $y©f(x)$, xP D

其中f是对应规则，D称为函数的定义域，x 叫做自变量，y就是函数(因变量).

全体函数值的集合称为值域:

$W=\{y|y=f(x), x\in D\}$

例7 $y=\sin^{-1}(2+x^2)$

对于任何函数x，都没有按规定与之对应的y值

函数定义域不能是空集，所以此例不是函数关系.

例8 $x>y$

每一个x值有无穷多个y值与之对应

函数定义中对应规则要求每一个x值只有一个y值与之对应，所以此例也不是函数关系.

注：x(自变量)，y(函数)，f(对应规则)，D(定义域)，W(值域)这五个要素中, 定义域和对应规则是最重要的两个要素.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数是相同的。

注：1˙ 在定义1中, 对于每一个x, 只能有一个y与它对应, 这种函数称为单值函数；否则为多值函数.

多值函数是一个x值对应二个或二个以上的y值.

2˙ 函数的表示方法: 解析法（公式法），图象法和列表法

2024 年北京大学 630 高等数学与地质学基础考研复习提纲

《高等数学》考研复习提纲

高等数学复习重点提纲

课程编号：

课程性质：专业基础课

课程类别：必修课

先修课程：

学　　分：

总学时数：

周学时数：

开课单位：

一、课程简介

高等数学是理工科(非数学)本科专业学生的一门必修的重要基础理论课，它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量专门人才服务的。

通过本课程的学习，使学生会获得高等数学各方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获取数学知识奠定必要的数学基础；逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和自学能力，培养学生综合运用所学数学知识去分析问题和解决问题的能力。

二、培养目标

(一)知识培养目标

通过本课程的学习，要使学生获得：1、函数与极限；2、一元函数微积分学；3、微分方程；4、向量代数与空间解析几何；5、多元函数微积分学；6、无穷级数等方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获取数学知识奠定必要的数学基础。

(二)能力培养目标

引导学生在生活实践中使用数学，在其它课程中应用数学，增强运用数学方法、借助计算机来分析和解决实际问题的能力；形成积极应用数学的氛围，在教学活动中，渗透素质教育，使学生提高逻辑思维能力，注重培养严谨求实的科学态度，树立科学的世界观。

三 、课程内容（请细化到每一节的内容）

第一章 函数与极限

§1.1 映射与函数

【学时】：4

【了解】：1. 函数奇偶性、单调性、周期性、有界性。
2. 反函数的概念。
3. 建立简单应用问题中的函数关系式的方法。
【掌握】：1. 函数的概念，函数的表示方法。
2. 复合函数及分段函数的概念。
3. 基本初等函数的性质及其图形
【重点】：1. 复合函数及分段函数的概念。
2. 基本初等函数的性质及其图形。
【难点】：分段函数的建立与性质

§1.2 数列极限

【学时】：2
【了解】：数列的极限与其子数列的极限之间的关系
【掌握】：1. 数列极限的概念，数列极限的性质。2. 子数列的概念
【重点】：数列极限的概念、性质
【难点】：数列极限的概念

§1.3 函数极限

【学时】：2
【了解】：
【掌握】：1. 函数极限的概念，函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系。
2. 函数极限的性质。
【重点】：函数极限的概念，函数极限的性质
【难点】：左极限与右极限概念及应用

§1.4 无穷大与无穷小

【学时】：2
【了解】：
【掌握】：1. 无穷大、无穷小的概念 2. 函数及其极限与无穷小的关系
【重点】：无穷大、无穷小的概念
【难点】：无界与无穷大的关系

§1.5 极限运算法则

【学时】：2
【了解】：
【掌握】：1. 无穷小的性质 2. 极限的四则运算法则，复合函数的运算法则及换元法则
【重点】：极限的四则运算法则和复合函数的运算法则
【难点】：

§1.6 极限存在准则 两个重要极限

【学时】：2
【了解】:利用两个准则求极限的方法
【掌握】：1.极限存在的夹逼准则和单调有界准则。2.利用两个重要极限求极限的方法。
【重点】：两个重要极限
【难点】：极限存在的两个准则的应用

§1.7 无穷小的比较

【学时】：1
【了解】：常见的等价无穷小
【掌握】：1. 无穷小的阶的概念。2. 无穷小的比较。3.利用等价无穷小求极限的方法。
【重点】：无穷小的比较
【难点】：

§1.8 函数的连续性与间断点

【学时】：2
【了解】：间断点的概念
【掌握】：1. 函数在一点连续和在一个区间上连续的概念。2. 会判别间断点的类型。
【重点】：函数连续性
【难点】：间断点及其分类

§1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性

【学时】：1
【了解】：连续函数的性质和初等函数的连续性
【掌握】：
【重点】：函数连续性及初等函数的连续性
【难点】：

§1.10 闭区间上连续函数的性质

【学时】：1
【了解】:闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）
【掌握】：
【重点】：区间上连续函数的性质
【难点】：闭区间上连续函数性质的应用

第二章 导数与微分

§2.1 导数的概念

【学时】：2
【了解】：导数的物理意义
【掌握】：1. 导数的概念、导数的几何意义及函数的可导性与连续性之间的关系。2. 会求平面曲线的切线方程和法线方程。3. 会求分段函数的导数。
【重点】：导数的概念
【难点】：分段函数的导数

§2.2 导数的求导法则

【学时】：2
【了解】：
【掌握】：1. 导数的四则运算法则、反函数和复合函数的求导法则。2. 基本初等函数的导数公式。
【重点】：1. 导数的四则运算法则、反函数和复合函数的求导法则。2. 基本初等函数的导数公式。
【难点】：反函数的导数

§2.3 高阶导数

【学时】：1
【了解】：高阶导数的概念
【掌握】：一些简单函数n阶导数的求法。
【重点】：高阶导数的概念
【难点】：

§2.4 隐函数和参数式所确定的函数的导数　相关变化率

【学时】：2
【了解】：相关变化率
【掌握】：会求隐函数和参数式所确定的函数的一阶、二阶导数
【重点】：隐函数和由参数方程确定的函数的导数
【难点】：隐函数和由参数方程确定的导数

§2.5 函数的微分

【学时】：2
【了解】：1.微分的四则运算法则和一阶微分形式不变性。2.微分的几何意义。
【掌握】：1.微分的概念，导数与微分的关系。2. 会求函数的微分

2024 年北京大学 630 高等数学与地质学基础考研核心题库

《高等数学》考研核心题库之解答题精编

1. 设 $f(x)=\pi^2-x^2, x\in(0,\pi]$，试将 f(x) 展开为以 2π 为周期的正弦级数和余弦级数.

【答案】(1)作偶延拓，展开为余弦级数，令

$$F_1(x)=\pi^2-x^2, x\in[-\pi,\pi]$$

则 $F_1(x)=f(x), \forall x\in(0,\pi]$. 由于 $F_1(x)$ 的傅里叶级数为

$$F_1(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

其中

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2},(n=1,2,\cdots)$$

所以由收敛定理知

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4}{n^2}\cos nx\ (0<x\leqslant\pi)$$

当 x=0 时，该级数收敛于 $\frac{F_1(0^+)+F_1(0^-)}{2}=\pi^2$.

(2)作奇延拓，即令

$$F_2(x)=\begin{cases}\pi^2-x^2, x\in(0,\pi]\\ x^2-\pi^2, x\in[-\pi,0)\end{cases},$$

则 $F_2(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{n}(2+(-1)^n)+\frac{4}{n^3\pi}(1-(-1)^n),$$

所以由狄利克雷收敛定理知

$$f(x)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(2+(-1)^n)\sin nx+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3},0<x\leqslant\pi.$$

而在 x=0 处，该级数收敛于 $\frac{F_2(0^+)+F_2(0^-)}{2}=0$.

2. 求 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

【答案】$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x,$$

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t}}\int\frac{\frac{1}{2}\sec t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\tan t}\frac{1}{2}\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{1}{2}(\sec^2 t+\sec t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)+C$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{x^2+x}+\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|)+C,$$

所以 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{4}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|+C.$

3. 求 $\int\max(x^3,x^2,1)\mathrm{d}x$.

【答案】令

$$f(x)=\max(x^3,x^2,1)=\begin{cases}x^3,x\geqslant 1\\ x^2,x\leqslant -1\\ 1,|x|<1\end{cases}$$

当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+C_1$$

当 $x\leqslant -1$ 时，有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_2$$

当|x|<1 时，有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C_3$$

由于原函数的连续性，有

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_3),\ 即\frac{1}{4}+C_1=1+C_3, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_3)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right),\ 即-1+C_3=-\frac{1}{3}+C_2, \qquad (2)$$

联立式(1)和式(2)，并令 $C_3=C$，则

$$C_1=\frac{3}{4}+C,C_2=-\frac{2}{3}+C$$

故

$$\int\max(x^3,x^2,1)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}+C,x\geqslant 1\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+C,x\leqslant -1\\ x+C,\quad |x|<1\end{cases}$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

【答案】因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=2-1=1$$

故原式=1.

5. 求$I=\oint_C 2y\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$，其中 C：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+z=R\end{cases}$，C 的方向是：由 z 轴正向看去(即人眼与 x 轴正向一致)是逆时针.

【答案】(1)参数法.

$$z=R-x\text{ 代入 }x^2+y^2+z^2=R^2\text{，有}2x^2-2Rx+y^2=0$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}=\frac{R^2}{4}$$

即 C 化为$\begin{cases}x=\dfrac{R}{2}(1+\cos t)\\y=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin t\\z=\dfrac{R}{2}(1-\cos t)\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

故

$$I=\oint_C 2y\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t\cdot\left(-\frac{R}{2}\sin t\right)-\frac{R}{2}(1-\cos t)\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t-\frac{R}{2}(1+\cos t)\cdot\frac{R}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t=\frac{-R^2}{2\sqrt{2}}\pi.$$

(2)利用斯托克斯公式.

选 S 为平面 x+z=1，圆域，半径$\dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

$$I=\oint_C P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}s.$$

故$I=\oint_C 2y\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z=\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+(-2\cos\gamma))\mathrm{d}s$

其中$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (S 为圆域，半径为$\dfrac{R}{\sqrt{2}}$)

即 $I=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\mathrm{d}s=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pi\cdot\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2=-\dfrac{\pi R^2}{2\sqrt{2}}$.

6. 求$I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

【答案】$I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

(1)求 a 的值;

(2)若当 $x\to 0$时，$f(x)-a$与x^k是同阶无穷小，求常数 k 的值.

【答案】(1) $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x-\sin x}{x^2}\right)=1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=1+0=1$$

故 a=1.

(2)由(1)可知 a=1，则

$$f(x)-a=\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}-1$$

$$=\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$$

由于 $f(x)-a\sim\dfrac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}$,

$(x\to 0)$,

令 $g(x)=\dfrac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}$

故只需求解 $x\to 0$，g(x)是 x^k 的同阶无穷小时，k 的取值.

待定系数法.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(x-\sin x)}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2(k+2)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k+1}}=C$$

其中 C 为常数，且 $C\neq 0, C\neq 1$

故 k+1=2，即 k=1 时，g(x)与 x^k 是同阶无穷小，也即 $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小.

2024 年北京大学 630 高等数学与地质学基础考研题库[仿真+强化+冲刺]

北京大学 630 高等数学与地质学基础之高等数学考研仿真五套模拟题

2024 年高等数学五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、解答题

1. 设$f(x)=\pi^2-x^2,x\in(0,\pi]$，试将 f(x)展开为以$2\pi$为周期的正弦级数和余弦级数.

【答案】(1)作偶延拓，展开为余弦级数，令

$$F_1(x)=\pi^2-x^2,x\in[-\pi,\pi]$$

则$F_1(x)=f(x),\forall x\in(0,\pi]$. 由于$F_1(x)$的傅里叶级数为

$$F_1(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

其中

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2},(n=1,2,\cdots)$$

所以由收敛定理知

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4}{n^2}\cos nx\,(0<x\leqslant\pi)$$

当 x=0 时，该级数收敛于$\frac{F_1(0^+)+F_1(0^-)}{2}=\pi^2$.

(2)作奇延拓，即令

$$F_2(x)=\begin{cases}\pi^2-x^2,x\in(0,\pi]\\x^2-\pi^2,x\in[-\pi,0)\end{cases}»$$

则 $F_2(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{n}(2+(-1)^n)+\frac{4}{n^3\pi}(1-(-1)^n),$$

所以由狄利克雷收敛定理知

$$f(x)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(2+(-1)^n)\sin nx+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3},0<x\leqslant\pi.$$

而在 x=0 处，该级数收敛于$\frac{F_2(0^+)+F_2(0^-)}{2}=0$.

2. 讨论曲线 y=4ln+k 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数

【答案】问题等价于讨论方程

$$\ln^4x-4\ln x+4x-k=0$$

有几个不同的实根

设$\varphi(x)=\ln^4x-4\ln x+4x-k$，则有 $\varphi'(x)=\frac{4(\ln^3x-1+x)}{x}$，不难看出，x=1 是$\varphi(x)$的驻点。

当 0<x<1 时，$\varphi'(x)<0$，即$\varphi(x)$单调减少；当 x>1 时，$\varphi'(x)>0$，即$\varphi(x)$单调增加，故$\varphi(1)=4-k$为函数$\varphi(x)$的最小值

当 k<4, 即 4-k>0 时，$\varphi(x)=0$无实根，即两条曲线无交点。

当 k=4, 即 4-k=0 时，$\varphi(x)=0$有唯一实根，即两条曲线只有一个交点。

当 k>4, 即 4-k<0 时，由于

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]$$
$$=+\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to +\infty}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]$$
$$=+\infty$$

故$\varphi(x)=0$有两个实根，分别位于(0, 1)与$(1+\infty)$内，即两条曲线有两个交点。

3. **设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}(t>-1)$所确定，其中$\psi(t)$具有 2 阶导数，且$\psi(1)=\frac{5}{2},\psi'(1)=6$，已知$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求函数$\psi(t)$**

【答案】根据题意得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2t+2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}$$
$$=\frac{3}{4(1+t)}.$$

即$\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)=6(t+1)^2$，整理有

$$\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2$$

联合初始条件得

$$\begin{cases}\psi''(t)-\frac{\psi'(t)}{t+1}=3(t+1)\\ \psi(1)=\frac{5}{2},\psi'(1)=6\end{cases}$$

令$p=\psi'(t)$，即有

$$p'-\frac{1}{1+t}p=3(1+t)$$

所以

$$p=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C\right)$$

$$= (1+t)(3t+C).$$

由 $p(1)=\psi'(1)=6$，有 C=0, 所以 p=3t(t+1)，即 $\psi'(t)=3t(t+1)$

故

$$\psi(t)=\int 3t(t+1)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_1$$

又由 $\psi(1)=\frac{5}{2}$，知 $C_1=0$，则

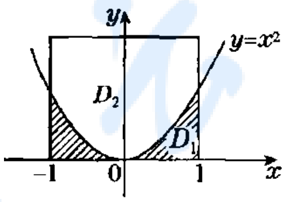
$$\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3(t>-1)$$

4. 求 $I=\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\right\}$.

【答案】为确定 $y-x^2$ 的正负性，用 $y=x^2$ 剖分区域 $D=D_1+D_2$，如下图所示.

$$I=\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$



图

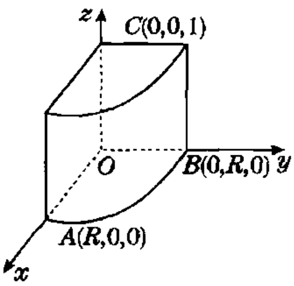
$I_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}-\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}$$

$$\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$$

故原式 $=I=\frac{1}{3}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$.

5. 求$I=\iint\limits_{S} z\,ds$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被 x=0，y=0，z=0 及 z=1 所截的第一象限部分. 如下图所示.



图

【答案】由曲面方程得：

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$ds=\sqrt{1+{y_x}^2+{y_z}^2}\,dxdz=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2}\,dxdz$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdz$$

故

$$I=\iint\limits_{S} z\,ds=\iint\limits_{Dxz}\frac{Rz}{\sqrt{R^2-z^2}}dxdz$$

其中

$$Dxz=\left\{(x,z)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant z\leqslant 1\right\}$$

即

$$I=\iint\limits_{S} z\,ds=R\int_0^R dx\int_0^1\frac{z}{\sqrt{R^2-x^2}}dz=\frac{\pi}{4}\cdot R.$$

6. 求椭圆抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 2+2y−z=0 的截线在三个坐标面上的投影方程。

【答案】截线(交线)方程为$\begin{cases}y^2+z^2=x\\x+2y-z=0\end{cases}$

将此方程分别消去 z，y，x 后，就是截线在 xOy,xOz,yOz 面上的投影方程。

$y^2+(x+2y)^2=x$

$\frac{1}{4}(z-x)^2+z^2=x$

$y^2+z^2=z-2y$

因此，截线在 x0y，x0z，y0z 面上的投影方程为

$\begin{cases}x^2+5y^2+4xy=x\\z=0\end{cases}$ $\begin{cases}5z^2+x^2-2xz=4x\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}y^2+z^2=z-2y\\x=0\end{cases}$

7. f(x)在x_0邻域连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=2$，试讨论 f(x)在$x_0$处的极值.

【答案】由 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=2\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}>0$(据保号性定理)，即$f(x)-f(x_0)$的正负性由