全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年北京大学

849统计学综合考研精品资料

策划：辅导资料编写组

【初试】2024年北京大学849统计学综合考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清PDF电子版支持打印，考研推荐资料。

一、重点名校真题汇编

1.附赠重点名校：概率论与数理统计2010-2022年考研真题汇编（暂无答案）

说明：赠送重点名校考研真题汇编，因不同院校真题相似性极高，甚至部分考题完全相同，建议考生备考过程中认真研究其他院校的考研真题。

二、2024年北京大学849统计学综合考研资料

2.《概率论与数理统计》考研相关资料

（1）《概率论与数理统计》[笔记+课件+提纲]

①北京大学849统计学综合之《概率论与数理统计》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段推荐资料。

②北京大学849统计学综合之《概率论与数理统计》本科生课件。

说明：参考书配套授课PPT课件，条理清晰，内容详尽，版权归属制作教师，本项免费赠送。

③北京大学849统计学综合之《概率论与数理统计》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《概率论与数理统计》考研核心题库（含答案）

③北京大学849统计学综合考研核心题库之《概率论与数理统计》计算题精编。

④北京大学849统计学综合考研核心题库之《概率论与数理统计》证明题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习推荐资料。

（3）《概率论与数理统计》考研题库[仿真+强化+冲刺]

①2024年北京大学849统计学综合之概率论与数理统计考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024年北京大学849统计学综合之概率论与数理统计考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习推荐。

③2024年北京大学849统计学综合之概率论与数理统计考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺推荐资料。

3.《概率论基础》考研相关资料

（1）《概率论基础》[笔记+提纲]

①北京大学849统计学综合之《概率论基础》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段推荐资料。

②北京大学849统计学综合之《概率论基础》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

三、电子版资料全国统一零售价

4. **本套考研资料包含以上一、二部分（高清 PDF 电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]**

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024 年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5. **北京大学 849 统计学综合考研初试参考书**

茆诗松《概率论与数理统计》

李贤平《概率论基础》

何书元《概率论》

陈家鼎《数理统计学讲义》

汪仁官《概率引论》

Casella《统计推断》

五、本套考研资料适用院系

前沿交叉学科研究院

目录

2024 年北京大学 849 统计学综合备考信息

北京大学 849 统计学综合考研初试参考书目

茆诗松《概率论与数理统计》

李贤平《概率论基础》

何书元《概率论》

陈家鼎《数理统计学讲义》

汪仁官《概率引论》

Casella《统计推断》

北京大学 849 统计学综合考研招生适用院系

前沿交叉学科研究院

2024年北京大学849统计学综合考研核心笔记

《概率论与数理统计》考研核心笔记

第1章　随机事件与概率

考研提纲及考试要求

考点：随机现象
考点：样本空间
考点：随机事件
考点：随机变量
考点：事件间的关系

考研核心笔记

【核心笔记】随机事件及其运算

1. 随机现象

概率论与数理统计的研究对象是随机现象.
定义在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象称为随机现象.
随机现象的特点：
结果不止一个；
哪一个结果出现事先不知道.
随机试验：在相同条件下可以重复的随机现象.
概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象.

2. 样本空间

定义：随机现象的一切可能结果组成的集合称为样本空间，记为$\Omega=\{\omega\}$
其中，ω表示基本结果，称为样本点.
离散样本空间和连续样本空间:
样本点个数为有限或可列的样本空间称为离散样本空间. 如Ω_1，Ω_2，Ω_3.
样本点个数为不可列无限个的样本空间称为连续样本空间. 如Ω_4，Ω_5.

3. 随机事件

定义随机现象的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称事件.
事件的图形表示称为维恩图.
由样本空间中的单个元素组成的子集称为基本事件.
Ω称为必然事件，$\varnothing$称为不可能事件.

4. 随机变量

定义用来表示随机现象结果的变量称为随机变量.
随机变量常用大写字母X,Y,Z来表示，很多随机事件可用随机变量表示.

5. 事件间的关系

事件之间的关系包括包含关系、相等关系、互不相容关系等，以及各种关系的维恩图表示.

包含关系

若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，即事件 A 发生必导致事件 B 发生.

二相等关系

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，即 $A=B$，称事件 A 与事件 B 相等.

三互不相容

若 $A\cap B=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的.即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

6. 事件运算

（1）事件运算：并、交、差、余.

①事件 A 与 B 的并记为 $A\cup B$，$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$，

当且仅当 A 与 B 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

②事件 A 与 B 的交记为 $A\cap B$ 或 AB $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$，当且仅当 A 与 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生.

事件的并交运算可推广到有限个或可列个事件，$\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 称为有限并，$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为可列并，$\bigcap_{k=1}^{n}A_k$ 称为有限交，$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为可列交.

③事件 A 对 B 的差记为 $A-B$，$A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}$，当且仅当 A 发生、B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

④对立事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$.

事件 A 与 B 互为对立事件的充要条件为若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\Phi$

利用对立事件，可知 $A-B=A\overline{B}$

⑤事件的运算性质

a. 交换律：

$$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A;$$

b. 结合律：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

c. 分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

b. 对偶律（德莫根公式）：

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B},\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}.$$

7. 事件域

（1）定义设Ω为一样本空间，F为Ω的某些子集组成的集合，如果F满足：

①$\Omega\in\mathrm{F}$;

②若$A\in\mathrm{F}$，则$\overline{A}\in\mathrm{F}$；

③若$A_n\in\mathrm{F}$，$n=1,2,\cdots$，则$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathrm{F}$.则称$\mathrm{F}$为一事件域或$\sigma-$代数.

（2）常见事件域

（3）波雷尔事件域：$\mathrm{F}=\sigma((-\infty,x),x\in\Re)$.

【核心笔记】概率的定义及其确定方法

1. 概率的公理化定义

定义设Ω为一样本空间,F为Ω上的某些子集组成的一个事件域，如果对任意事件,$A\in\mathrm{F}$定义在F上的一个实值函数 P（A）满足：

非负性公理：$P(A)\geq 0;$

正则性公理：$P(A)=1;$

可列可加性公理：若$A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$两两互不相容，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n);$$

则称 P（A）为事件 A 的概率，称三元素(Ω,F,P)为概率空间.

概率是关于事件的满足如上三条公理的函数.

2. 排列与组合公式

两大计数原理

（1）乘法原理完成一件工作分m个步骤，第一步骤有n_1种方法，第二步骤有n_2种方法，……第m个步骤有n_m种方法，那么完成这件工作共有$n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$种方法.

（2）加法原理：完成一件工作有m个独立的途径，第一个途径有n_1种方法，……第m个途径有n_m种方法，那么完成这件工作共有$n_1+n_2+\cdots+n_m$种方法.

排列组合公式

以上述两个原理为基础，可以推导出如下的排列、组合等公式：

①排列：从 n 个元素中取出 r 个来排列，既要考虑每次取到哪个元素，又要考虑取出的顺序，这种排列称为选排列，总数 $A_n^r = n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$，特别地 $A_n^n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ 称为 n 个元素的全排列.

②重复排列每次选取都是在全体元素中进行，同一元素可被重复选中，这种排列称为有重复排列，总数为 n^r 种.

③组合

从 n 个元素中取出 r 个元素的组合是不考虑元素的顺序的，其组合总数为

$$\binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

重复组合

从 n 个元素中每次取一个，放回后再取下一个，连续取 r 次所的组合数为 C_{n+r-1}^r，称为重复组合数.

3. 确定概率的频率方法

定义在 n 次独立重复试验中，记 $n(A)$ 为事件 A 出现的次数，又称 $n(A)$ 为事件 A 的频数，称

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$$

为事件 A 出现的频率.

基本思想在与考察事件 A 有关的随机现象可大量重复进行的条件下，记事件 A 的频率为 $f_n(A)$，随着 n 的增加，$f_n(A)$ 会稳定在一常数 α 附近，这个频率的稳定值就是所求事件 A 的概率.

4. 确定概率的古典方法

基本思想

（1）所涉及的随机现象只有有限个样本点，譬如 n 个；

（2）每个样本点发生的可能性相等；

（3）若事件 A 含有 k 个样本点，则 A 的概率为

$$P(A) = \frac{\text{事件A所含样本点个数}}{\Omega\text{中所含样本点个数}} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}.$$

5. 确定概率的几何方法

基本思想

（1）如果一个随机现象的样本空间 Ω 充满某个区间，其度量可用 S_Ω 表示；

（2）任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的；

（3）若事件 A 为 Ω 中的某个子区域，其度量为 S_A，则事件 A 的概率为

这时实际向大家介绍了一个很有用的计算方法，即若我们想要计算一个感兴趣的量（上面这个量是 π），则可适当地设计一个随机试验，使试验下某个事件的概率与感兴趣的那个有关，然后重复试验多次，以频率代事件的概率便可求出那个量的近似解来。人们称这种计算方法为随机模拟法或蒙特——卡洛

《概率论基础》考研核心笔记

第 1 章　事件与概率

考研提纲及考试要求

考点：随机现象与统计规律性
考点：古典概率
考点：随机事件关系与运算

考研核心笔记

【核心笔记】随机现象与统计规律性

1.随机现象

在一定条件下，因不可控因素而导致实验或观察结果不唯一的现象成为随机现象。客观世界存在大量的随机现象。

2.随机试验

为研究随机现象而进行的观察和实验统称为随机试验。随机试验必具备以下特点：

（1）至少有两个以上可能结果；

（2）试验的所有可能结果由试验条件明确已知，但每次具体试验之前不可预测本次试验将要出现的结果；

（3）试验可在相同条件下多次重复。

下面是一些随机试验的例子

例 1.1 某人抛掷一枚骰子，观察朝上面的点数。

例 1.2 从装有 7 个白球和 3 个黑球的盒子中随意取出两个球，观察其颜色。

例 1.3 从某厂所生产的 10000 件产品中随意抽取 53 件产品，考察其中次品的件数

例 1.4 从某校中随意抽选一名学生，测量其身高。

3.随机事件

随机试验的结果称为随机事件，简称事件。

随机事件在具体一次试验中有可能出现也有可能不出现，它具有不可预见性。如果随机事件在一次具体试验中出现了，就称该随机事件发生了。一般用大写的英文字母来表示随机事件，如 A,B,C…。

随机事件的分类:

基本事件:随机试验不可再分的结果

复合事件:用随机试验若干个基本事件共同方可表达的结果

特殊事件:必然事件和不可能事件

4.样本空间

随机试验基本事件的全体所形成的集合称为该随机试验的样本空间，一般用字母Ω表示。

样本空间是由所要研究的问题及其该问题所涉及的随机试验确定的，它是研讨问题的论域。

例如：

例 1.1 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，其中 ω_1 表示朝上面的点数为 1，ω_2 表示朝上面的点数为 2，

其余记号类似。

例 1.2 的样本空间$\Omega=\{(WW),(WB),(BW),(BB)\}$，其中 W 表示白球，B 表示黑球。如果将问题变为“观察白球出现的个数”，那么，样本空间$\Omega=\{0,1,2\}$，其中“0”表示所抽球中，其中“0”表示所抽球中没有白球，“1”表示所抽球中有 1 个白球，其余记号类似。

例 1.3 的样本空间$\Omega=\{0,1,2,\cdots,53\}$，其中“0”表示所抽产品中没有次品，其余记号类似。

例 1.4 的样本空间$\Omega=\{X:X=x,1.50\le x\le 1.90\}$，其中 X 表示所抽到学生的身高。

5.频率稳定性

设将试验 E 进行了 n 次，其中 m_A 次发生了事件 A，则称m_A/n为事件 A 发生的频率，记为$f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{m_A}{n}$$

显然，频率具有下列性质：

$(1)0\le f_n(A)\le 1$

$(2)f_n(\varnothing)=0,\ f_n(\Omega)=1$

(3)设随机事件 A 与 B 不能同时发生，
则$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

随机事件在一次试验中是否发生带有偶然性，但当试验次数不断增大时，它发生的频率就趋于稳定，这种规律称为随机事件的统计规律性。

在历史上，为了证明随机事件的统计规律性，人们进行了许多试验。最著名的有掷硬币试验、高尔顿板实验。

掷硬币试验的历史资料表

试验者	抛掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德摩根	2048	1061	0.5180
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

6.随机事件概率

从前面的讨论我们不难看出，同一随机试验的不同事件由于其内在的差别，在具体的试验过程中，它们各自发生的机会是不定一样的。为了刻画这种差异需要有一个指标，这个指标就是概率。所谓概率是用来刻画随机事件在一次试验中发生机会大小的一个数量指标。

概率的统计确定法

在相同条件下重复进行的 n 次试验中，事件 A 发生的频率$f_n(A)$稳定地在某一常数 p 附近摆动，且随 n 越大摆动幅度越小，则称 p 为事件 A 的概率，记作$P(A)=p$。

概率的统计定义对试验没有特殊限制，适用于所有随机试验。优点是易于理解，在试验次数足够大时能给出概率的近似值；不足是粗糙、模糊和不便使用。

例 1.5 为掌握一批小麦种子的发芽率，从这批小麦种子中抽取若干种子做发芽试验，统计结果如下表所示。试由此资料：

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903

确定该批小麦种子的发芽率。

解：从表内的资料可看出，随着做试验种子粒数的增加，种子发芽的频率在 0.9 附近摆动，参与发芽试验的种子粒数愈大附近摆动愈小，所以，这批小麦种子的发芽率大概应在 0.9 这个数值上。

注意：概率的统计定义只给出了确定事件概率近似方法。请大家思考概率的统计定义与下列极限过程有何区别？也即概率的统计定义能否理解为下式成立：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = p$$

【核心笔记】随机事件关系与运算

显然，样本空间是一基本事件为元素的集合，复合事件是样本空间的真子集，必然事件就是样本空间，不可能事件是样本空间的空子集；如果再规定基本事件就是一个单点集，那么，随机事件就可以用集合来表示，但事件与集合又有所不同。所谓一个事件发生时指表达该事件的集合中的一个元素在试验中出现了。

1.事件的包含与等价

设 A,B 为任意两个事件，若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为$A\subset B$。

例如：在例 1.1 中，令 A 表示掷得点数能被 3 整除；B 表示掷得的点数大于 2。则$A\subset B$。

如果有$A\subset B$成立，也称 A 为 B 的子事件。

设 A,B 为任意两个事件，若$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件 A 与 B 等价或相等。记为 A=B。

例如：在例 1.1 中，令 A 表示掷得点数能被 3 整除；B 表示掷得的点数为 3 或 6，则 A=B。

2.事件的互斥与对立

设 A,B 为任意两个事件，若 A 与 B 在一次试验中不能同时发生，则称事件 A 与 B 互斥。若 A 与 B 互斥，且在一次试验中必有一个发生，则称 A 与 B 互为对立事件。记 A 的对立事件为$\bar{A}$

例如：

在例 1.1 中，令 A 表示掷得点数能被 3 整除；B 表示掷得的点数小于 3，则 A 与 B 互斥。

在例 1.2 中，令 A 表示抽出的两球中至少有一球为白色球，B

表示抽出的两球全为黑球，则 A 与 B 互为对立事件。

显然，事件 A 与 B 互为对立事件，则它们一定互斥。

3.互斥事件完备群

设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为一组事件，如果它们之中任意两个之间互斥，每次试验中必有它们其中一个发生，则称这组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 形成互斥事件完备群。

例如：

在例 1.4 中，令

$$A_1=\{X:1.50\le X<1.60\}$$

$$A_2=\{X:1.60\le X<1.70\}$$

$$A_3 = \{X : 1.70 \le X \le 1.90\}$$

则 A_1, A_2, A_3 形成一个互斥事件完备群，如图 1.1 所示。

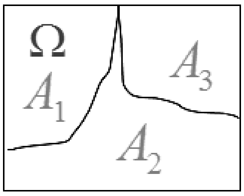

图1.1

显然，互为对立的两个事件一定形成一个互斥事件完备群。因此，互斥事件完备群是对立事件概念的推广。互斥事件完备群形成样本空间的一个分割。后面将要遇到的概率计算中，利用互斥事件完备群在一些情况下可以化简复杂事件概率计算。

4.事件的和运算

设 A，B 为任意两个事件，则称“事件 A 与事件 B 至少一个发生”这样的试验结果为事件 A 与事件 B 的和事件；这样的运算称为事件和运算。记 A 与 B 的和事件为 A+B。

从运算角度来看，事件与的和事件就是将两事件中所包含的不同的基本事件全体拿来形成一个集合所表达的事件，如图 1.2 所示。

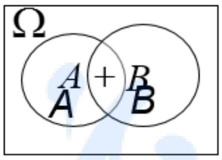

图1.2

从定义不难看出事件的和运算具有下列性质

（1）$A \subset A+B$；

（2）若 $A \subset B$，则 A+B=B；

（3）A+A=A。

事件和运算概念的推广：

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 为一个事件序列，

则称“事件序列 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 中至少有一个事件发生”这样的试验结果为事件序列 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 中事件的和事件。记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots$。

①事件的积运算

设 A，B 为任意两个事件，则称“事件 A 与事件 B 两个同时发生”这样的试验结果为事件 A 与事件 B 的积事件；这样的运算称为事件积运算。记 A 与 B 的积事件为 AB。

从运算角度来看，事件 A 与 B 的积事件就是由两个事件所包含的公共基本事件全体构成的集合所表达的事件，如图 1.3 所示。

从定义不难看出事件的积运算具有下列性质

a. $AB \subset A, AB \subset B$；

b. 若 $A \subset B$，则 AB=A；

2024 年北京大学 849 统计学综合考研辅导课件

《概率论与数理统计》考研辅导课件

第一章　随机事件与概率

第一章　随机事件与概率

§1.2　概率的定义及其确定方法

- 直观定义 —— 事件A出现的可能性大小.
- 统计定义 —— 事件A在大量重复试验下出现的频率的稳定值称为该事件的概率.
- 古典定义；几何定义.

1.2.1　概率的公理化定义

- 非负性公理：$P(A)\geq 0$;
- 正则性公理：$P(\Omega)=1$;
- 可列可加性公理：若$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\ldots\ldots$互不相容，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

1.2.3　确定概率的频率方法

- 随机试验可大量重复进行.
- 进行n次重复试验，记 $n(A)$ 为事件A的频数，称 $f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$ 为事件A的频率.
- 频率$f_n(A)$会稳定于某一常数(稳定值).
- 用频率的稳定值作为该事件的概率.

1.2.4　确定概率的古典方法

古典方法　设 Ω 为样本空间，若

① Ω只含有限个样本点;

② 每个样本点出现的可能性相等，

则事件A的概率为:

$P(A)=A$中样本点的个数 / 样本点总数

1.2.5　确定概率的几何方法

若 ① 样本空间Ω充满某个区域，其度量(长度、面积、体积)为S_Ω;

② 落在Ω中的任一子区域A的概率，只与子区域的度量S_A有关，而与子区域的位置无关(等可能的).

则事件A的概率为: $P(A)=S_A/S_\Omega$

几何方法的例子

例1.2.3　蒲丰投针问题

平面上画有间隔为d的等距平行线，向平面任意投掷一枚长为l的针，求针与平行线相交的概率.

蒲丰投针问题(续1)

解：以x表示针的中点与最近一条平行线的距离，又以φ表示针与此直线间的交角.

易知样本空间Ω满足：

$$0\leq x\leq d/2,\quad 0\leq \varphi\leq \pi.$$

Ω形成x-φ平面上的一个矩形，其面积为：

$$S_\Omega=d(\pi/2).$$

蒲丰投针问题(续2)

A = "针与平行线相交" 的充要条件是:

$$x \le l/2 \sin \varphi .$$

针是任意投掷的，所以这个问题可用几何方法求解得

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{d(\pi/2)}=\frac{2l}{d\pi}$$

§1.3 概率的性质

性质1.3.1 $P(\varphi)=0$.

注意: 逆不一定成立.

1.3.1 概率的可加性

性质1.3.2 (有限可加性)

若$AB=\varphi$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

可推广到 n 个互不相容事件.

性质1.3.3 (对立事件公式)

$$P(\ )=1-P(A).$$

彩票问题——幸运35选7

- 购买: 从01，……，35 中选7个号码.
- 开奖: 7个基本号码，1个特殊号码.

中奖规则

1) 7个基本号码
2) 6个基本号码 + 1个特殊号码
3) 6个基本号码
4) 5个基本号码 + 1个特殊号码
5) 5个基本号码
6) 4个基本号码 + 1个特殊号码
7) 4个基本号码，或 3个基本号码 + 1个特殊号码

中奖概率

- Ω 中所含样本点个数: C_{35}^7
- 将35个号分成三类:
  7个基本号码、1个特殊号码、27个无用号码
- 记 p_i 为中i 等奖的概率。利用抽样模型得:

$$p_1=\frac{C_7^7C_1^0C_{27}^0}{C_{35}^7}, \quad p_2=\frac{C_7^6C_1^1C_{27}^0}{C_{35}^7}$$

- 中奖概率如下:

$$p_1=\frac{1}{6724520}, \quad p_2=\frac{7}{6724520}, \quad p_3=\frac{189}{6724520}$$

$$p_4=\frac{567}{6724520}, \quad p_5=\frac{7371}{6724520}, \quad p_6=\frac{12285}{6724520}$$

$$p_7=\frac{204750}{6724520}.$$

- 不中奖的概率为:

$$p_0=1-p_1-p_2-p_3-p_4-p_5-p_6-p_7 = \frac{6499350}{6724520} = 0.966515.$$

生日问题

- 求n 个人（n小于等于365）中至少有两人生日相同的概率.
- 看成 n 个球放入 N=365个盒子中.
- P(至少两人生日相同)=1−P(生日全不相同)
- 用盒子模型得，p_n= P(至少两人生日相同)=

$$1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

p_{20}=0.4058，p_{30}=0.6963，p_{50}=0.9651，p_{60}=0.9922

1.4.1 条件概率的定义

<u>定义1.4.1</u>

对于事件A、B，若$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$

为在B出现的<u>条件下</u>，A出现的<u>条件概率</u>.

条件概率 $P(A|B)$ 的计算

1) <u>缩减样本空间</u>：将Ω缩减为$\Omega_B=B$.

2) <u>用定义</u>：$P(A|B)=P(AB)/P(B)$.

例1.4.1 10个产品中有7个正品、3个次品，从中不放回地抽取两个，已知第一个取到次品，求第二个又取到次品的概率.

解：设$A=\{$第一个取到次品$\}$，

$B=\{$第二个取到次品$\}$，

$$P(B|A)=P(AB)/P(A)=(1/15)/(3/10)=2/9$$

条件概率的三大公式

- 乘法公式；
- 全概率公式；
- 贝叶斯公式.

1.4.2 乘法公式

<u>性质1.4.2</u>

(1) 若$P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

若$P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

(2) 若$P(A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})$$

1.4.3 全概率公式

<u>性质1.4.3</u>

若事件$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是样本空间$\Omega$的一组分割，且$P(B_i)>0$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

注意点(1)

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.
- 全概率公式最简单的形式：

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

例1.4.2 设10件产品中有3件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解：设$A=$“第一次取得不合格品”，

$B=$“第二次取得不合格品”.

由全概率公式得：

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$
$$=(3/10)\times(2/9)+(7/10)\times(3/9)=3/10$$

1.4.4 贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率;
- 全概率公式是求“最后结果”的概率;
- 贝叶斯公式是已知“最后结果”，求“原因”的概率.

已知“结果”，求“原因”

某人从甲地到乙地，乘飞机、火车、汽车迟到的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具，若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率.

（1/6， 2/6， 3/6）

贝叶斯（Bayes）公式

若事件$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是样本空间Ω的一组分割，且$P(A)>0$，$P(B_i)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}\qquad i=1,2,\ldots,n$$

注 意 点

1) $B_1, B_2, \ldots, B_n$可以看作是导致A发生的原因;
2) $P(B_j|A)$是在事件A发生的条件下，某个原因B_j发生的概率，称为“后验概率”;
3) Bayes公式又称为“后验概率公式”或“逆概公式”;
4) 称$P(B_j)$为“先验概率”.

§1.5 独立性

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

$\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow$ $P(AB)/P(B) = P(A)$

$\Leftrightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

1.5.1 两个事件的独立性

- 定义1.5.1 若事件 A 与 B 满足：
  $P(AB)=P(A)P(B)$，
  则称A与B相互独立，简称A与B独立.
- 结论 A、B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则 A 与 B 独立等价于 $P(B|A)=P(B)$.
- 性质1.5.1 若事件A与B独立，则
  A 与 独立、 与 B 独立、 与 独立.

1.5.2 多个事件的相互独立性

- 对于A、B、C三个事件，称满足：
  $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$
  为A、B、C 两两独立.
- 称满足：$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$
  为A、B、C三三独立.

定义1.5.3 若事件 $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$满足：
两两独立、三三独立、……、n n 独立
则称$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$相互独立.

一 些 结 论

若A、B、C相互独立，则

$A\cup B$ 与 C 独立,

$A\cap B$ 与 C 独立,

$A-B$ 与 C 独立.

2024年北京大学849统计学综合考研复习提纲

《概率论与数理统计》考研复习提纲

概率论与数理统计复习提纲

第一章 随机事件与概率

【知识点提示】熟练掌握随机试验，样本空间，样本点，事件与事件的运算，概率的定义与 性质，古典概型，条件概率与乘法原理，事件的独立性，基本知识点如下：

1、 样本空间的概念，随机事件的概念，事件的关系与运算。

2、事件频率的概念，了解概率的统计定义。

3、 概率的古典定义，计算简单的古典概率。

4、 概率的公理化定义，概率的基本性质及概率加法定理。

5、 条件概率的概念、概率的乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式。

6、事件的独立性概念。

【重难点提示】事件的运算、概率的定义及性质，事件的独立性。利用概率的性质解决古典 概型的概率及对“相互独立事件“的理解。

第一节. 随机事件及其运算

一、统计规律性

二、随机现象

三、随机试验

四、样本空间

五、随机事件

六、随机事件之间的运算

第二节　概率的定义及其确定方法

一、频率

二、概率的公理化定义和性质

三、确定方法

第三节　概率的性质

一、古典概型的定义

二、古典概型的典型举例和应用

三、性质

第四节　条件概率

一、条件概率

二、乘法公式

三、全概率公式

四、贝叶斯公式

第五节　独立性

一、事件的独立性的定义

二、事件的独立性的应用

第二章 随机变量及其分布

【知识点提示】初步了解随机变量，分布函数及分布函数的性质，离散型随机变量及其概率 分布，连续型随机变量及概率密度函数，随机变量函数的分布，基本知识点如下：

1、 随机变量的概念、离散型随机变量及分布律的概念和性质。

2、 分布函数的概念和性质，利用概率分布计算有关事件的概率。

3、 简单随机变量函数的概率分布。

4、 0-1 分布、二项分布、普哇松分布的定义，知道二项分布与普哇松分布的关系。

5、 均匀分布、指数分布、正态分布与标准正态分布的定义与关系，正态分布的概率密度函数的性质，用正态分布的概率密度函数计算概率问题。

6、 随机变量函数的分布的定理计算方法。

【重难点提示】随机变量与分布函数的概念，离散型随机变量、连续型随机变量的概念及概 率的求法，对分布函数的理解及用该函数求具体概率问题，随机变量函数的分布。

第一节　随机变量及其分布

一、离散型随机变量

二、连续型随机变量

第二节　随机变量的数学期望

一、 定义

二、 性质

三、 期望的应用

第三节　随机变量的方差与标准差

一、 随机变量的方差

二、 随机变量的标准差

第四节　常用的离散分布

掌握离散分布函数的定理求法

第五节　常用的连续分布

掌握连续分布的类型及应用

第六节 常用变量函数的分布

单值连续函数的分布特点及应用

第七节 分布的其他特征数

一、定义；

二、性质；

三、应用

第三章 多维随机变量及其分布

【知识点提示】掌握二维随机变量，联合分布，边缘分布，条件分布 ，相互独立的随机变 量，两个随机变量的函数的分布。基本知识点如下；

1、二维随机变量的概念（离散型随机变量及连续型随机变量）及概率密度的概念和性质。

2、 二维分布函数的概念和性质，利用概率分布计算有关事件的概率。

3、 二元随机变量的概念，联合分布与边缘分布的概念及其关系，离散型和连续型二维 随机变量的条件分布的计算。

4、 随机变量相互独立性的概念。

【重难点提示】随机变量的相互独立性。对分布函数的理解及用该函数求概率问题，联合分 布与边缘分布之间的关系。

第一节　多维随机变量及其分布

一、多维离散型随机变量的表达方式

二、多维连续型随机变量的表达方式

第二节　边缘分布

一、联合分布与边缘分布的概念及其关系

二、离散型随机变量边缘分布列

三、连续型随机变量的边缘概率密度函数

第三节　条件分布

一、二维离散型随机变量的两种条件分布的计算方法

二、二维连续型随机变量的两种条件分布概率密度函数的计算

第四节　多维随机变量的特征数

一、了解特征数条件

二、利用随机变量的特征数解决实际问题

第五节　条件分布与条件期望

一、条件分布的定义；

二、条件分布的定义

三、条件期望；

第四章 大数定律与中心极限定理

【知识点提示】了解切比雪夫不等式，切比雪夫大数定律与贝努里大数定律，辛钦大数定律中心极限定理（独立同分布的中心极限定理、李雅普洛夫、棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理）。

基本知识点：

1、贝努里大数定律的内容与含义。

2、中心极限定理的内容与含义。

【重难点提示】对贝努里大数定律，中心极限定理的理解

第一节　特征函数

一、特征函数的定义；

二、性质

第二节　大数定律

一、切比雪夫不等式及其意义

二、切比雪夫大数定律与贝努里大数定律的内容与含义。

第三节 随机变量序列的两种收敛性

一、收敛行描述；

二、性质

第四节 中心极限定理

一、独立同分布的中心极限定理的内容与含义

二、李雅普洛夫的内容与含义

三、棣莫佛 - 拉普拉斯中心极限定理的内容与含义。

2024年北京大学849统计学综合考研核心题库

《概率论与数理统计》考研核心题库之计算题精编

1. 设总体X服从自由度为m的χ^2分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其一个样本，试求该样本的样本均值$\overline{X}$的密度函数.

【答案】由于总体$X\sim\chi^2(m)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为样本，故$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\chi^2(mn)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$的密度函数为f(x)，则$\overline{X}$的密度函数为

$$f_X(x)=f(nx)\cdot n=\begin{cases}\dfrac{n}{2^{\frac{mn}{2}}\Gamma\left(\dfrac{mn}{2}\right)}(nx)^{\frac{mn}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n^{\frac{mn}{2}}}{2^{\frac{mn}{2}}\Gamma\left(\dfrac{mn}{2}\right)}x^{\frac{mn}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}.$$

2. 蟋蟀用一个翅膀在另一翅膀上快速地滑动，从而发出吱吱喳喳的叫声，生物学家知道叫声的频率x与气温Y具有线性关系. 下表列出了15对频率与气温间的对应关系的观察结果：

频率 x_i(叫声数/秒)	20.0	16.0	19.8	18.4	17.1	15.5	14.7	17.1
气温 y_i(℃)	31.4	22.0	34.1	29.1	27.0	24.0	20.9	27.8
频率 x_i(叫声数/秒)	15.4	16.2	15.0	17.2	16.0	17.0	14.4	
气温 y_i(℃)	20.8	28.5	26.4	28.1	27.0	28.6	24.6	

试求Y关于x的线性回归方程.

【答案】本题需求出Y关于x的线性回归函数a+bx. 为此，先将需要的计算值列表如下：

	x	y	x^2	xy
	20.0	31.4	400	628
	16.0	22.0	256	352
	19.8	34.1	392.04	675.18
	18.4	29.1	338.56	535.44
	17.1	27.0	292.41	461.7
	15.5	24.0	240.25	372
	14.7	20.9	216.09	307.23
	17.1	27.8	292.41	475.38
	15.4	20.8	237.16	320.32
	16.2	28.5	262.44	461.7
	15.0	26.4	225	396
	17.2	28.1	295.84	483.32
	16.0	27.0	256	432
	17.0	28.6	289	486.2
	14.4	24.6	207.36	354.24
$\sum$	249.8	400.3	4 200.56	6 740.71

$$S_{xx}=\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2=4\,200.56-\frac{1}{15}\times 249.8^2=40.557$$

$$S_{xy}=\sum x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)=6\,740.71-\frac{1}{15}\times 249.8\times 400.3$$

$$=74.381,$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{74.381}{40.557}=1.834$$

$$\hat{a}=\frac{1}{n}\sum y_i-\frac{\hat{b}}{n}\sum x_i=\frac{1}{15}\times 400.3-\frac{1}{15}\times 1.834\times 249.8=-3.855$$

故回归方程为$\hat{y}=-3.855+1.834x$.

3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求常数 A 及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

【答案】由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dydx=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dydx$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}dx=A\cdot\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi=1$$

$$\therefore A=\frac{1}{\pi}$$

当$-\infty<x<+\infty$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<y<+\infty$$

4. 某种导线的电阻 X 服从正态分布$N(\mu,0.05^2)$,现从新生产的导线中抽取 9 根,测其电阻,得样本标准差 S=0.008 对应 a=0.05,是否可以认为这批导线电阻的方差仍然为0.05^2?

表:χ^2分布表:$P(\chi^2(n)\geq\chi_\alpha^2)=\alpha$

n \ α	0.975	0.025
8	2.18	17.5
9	2.70	19.0

【答案】$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$,$\sigma_0^2=0.005^2$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$$

拒绝域为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>X^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1),\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<X^2_{\frac{a}{2}}(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=20.5,\ X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=X^2_{0.975}(8)=2.18$$

$$X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=X^2_{0.025}(8)=17.5$$

由于 20.5>2.18,落在拒绝域内，拒绝H_0，不能认为这批导线电阻的方差仍为0.05^2。

5. **随机地选 8 个人，分别测量了他们在早晨起床时和晚上就寝时的身高(cm),得到以下数据.**

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8
早上(x_i)	172	168	180	181	160	163	165	177
晚上(y_i)	172	167	177	179	159	161	166	175

设各对数据的差 $D_i=X_i-Y_i(i=1,2,\cdots,8)$是来自正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，$\mu_D,\sigma_D^2$均未知，问是否可以认为早晨的身高比晚上的身高要高(取 a=0.05)?

【答案】设$D_i=X_i-Y_i,i=1,2,\cdots,8,D_1,D_2,\cdots,D_8$独立同服从$N(\mu_D,\sigma_D^2)$分布，需检验假设

$H_0:\mu_D\leqslant 0,H_1:\mu_D>0$

由$D_i=X_i-Y_i$，得

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8
D	0	1	3	2	1	2	−1	2

$$\bar{D}=\frac{1}{8}(0+1+3+2+1+2-1+2)=\frac{5}{4}$$

$$S^2=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(D_i-\bar{D})^2=\frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{8}D_i^2-8\bar{D}^2\right)=\frac{1}{7}\left(24-\frac{25}{2}\right)$$

所以 S=1.28

检验的拒绝域为

$$t=\frac{\bar{D}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\geqslant t_\alpha(n-1)$$

而

$$t=\frac{\bar{D}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1.28}{\sqrt{8}}}=2.76$$

当$\alpha=0.05,t_{0.05}(7)=1.8946$. 因 t=2.76>1.8946.

故拒绝假设H_0，即认为早晨的身高比晚上的身高要高.

6. **设随机变量 X 的概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若\ x\in[1,8]\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

求：(1)X 的分布函数 F(x)；(2)随机变量 Y=F(X)的分布函数。

【答案】显然，当 x<1 时,F(x)=0;当$x\geqslant 8$时，F(x)=1。

对于$x\in[1,8)$，有

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1$$

即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \sqrt[3]{x}-1, & 1\leqslant x<8\\ 1, & x\geqslant 8\end{cases}$$

设 G(y) 是随机变量 Y=F(X) 的分布函数，

显然，当 y<0 时，G(y)=0；当$y\geqslant 1$时，G(y)=1。

对于 $y\in[0,1)$，有

$$\begin{aligned}G(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}\\&=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant (y-1)^3\}\\&=F[(y+1)^3]=y\end{aligned}$$

于是，Y=F(X) 的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\leqslant y<1\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}$$

7．**设随机变量 X 的概率密度为** $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ **令** $Y=X^2$**，F(x, y) 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数. 求：(1) Y 的概率密度** $f_Y(y)$**；(2)** $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

【答案】(1) $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$

当 y<0 时，$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=0$；

当$0\leqslant y<1$时，$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y};$$

当$1\leqslant y<4$时，$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2};$$

当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$.

所以 $f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$

$$=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$$

8．**设总体 X 的概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$是未知参数，从总体 X 中抽取简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，记$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

(1) 求总体 X 的分布函数 F(x)；

附赠重点名校：概率论与数理统计 2010-2022 年考研真题汇编（暂无答案）

第一篇、2022 年概率论与数理统计考研真题汇编

2022 年中国人民解放军陆军工程大学 701 概率论与数理统计考研专业课真题

中国人民解放军陆军工程大学

2022 年全国硕士研究生统一入学考试初试试题

科目代码：701 科目名称：概率论与数理统计 满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知事件 A 的概率 $P(A)=0.5$,事件 B 的概率 $P(B)=0.6$,条件概率 $P(B|A)=0.8$,则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ ______.

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$F(x)$ 为其分布函数，则有 $F(\sigma)+F(-\sigma)=$ ______.

3. 设随机变量 X 服从参数为 $\theta=1$ 的指数分布,则 $P\{X=E(X^2)\}=$ ______.

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 $P\{X+Y\le 1\}=$ ______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的容量为 n 的简单随机样本，S^2 为样本方差,则 $E(S^2)=$ ______.

二、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B,C 为随机事件,则下列选项中一定正确的是______.

(A) 若 $P(A)=0$,则 A 为不可能事件

(B) 若 A 与 B 相互独立,则 A 与 B 互不相容

(C) 若 A 与 B 互不相容,则 $P(A)=1-P(B)$

(D) 若 $P(AB)\neq 0$,则 $P(BC|A)=P(B|A)P(C|BA)$

2. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关,$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 分别为 X、Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 条件下,X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为______.

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

3. 设 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 是来自正态总体 $N(1,2^2)$ 的样本,$\overline{X}$ 为样本均值,则下列选项中正确的是______.

(A) $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim t(n)$　　(B) $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim F(n,1)$

(C) $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　　(D) $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim \chi^2(n)$

4. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 σ^2 已知,若已知样本容量和置信度 $1-\alpha$ 均不变,则对于不同的样本观测值,总体均值 μ 的置信区间的长度______.

(A) 有所不同　(B) 可能相同也可能不同　(C) 相同　(D) 不能确定

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 $\sigma=2$,μ 未知,$X_1, X_2,\cdots, X_n$ 为来自总体的样本,样本均值为 $\overline{X}$,样本方差为 S^2,则下列各式中不是统计量的选项为______.

(A) $2\overline{X}$　　(B) $\dfrac{S^2}{\sigma^2}$

(C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$　　(D) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

三、计算题（本题共 3 小题,每小题 10 分,共 30 分）

1. 设有三个盒子,第一个盒内装有 4 个红球,1 个黑球；第二个盒内装有 3 个红球,2 个黑球；第三个盒内装有 2 个红球,3 个黑球. 若任取一个盒子,从中任取 3 个球.

（1）取出的 3 个球中有 2 个红球,求事件的概率;

（2）若取出的 3 个球中有 2 个红球,求此 3 个球是取自第一个盒子的概率.

2. 已知连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=Ce^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$,求:

（1）常数 C; （2）X 的分布函数 $F_X(x)$; （3）概率 $P\{1<X<3\}$.

3. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\ (0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数,利用总体 X 的如下样本值: 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求:（1）θ 的矩估计值;（2）极大似然估计值.

四、综合题（本题共 6 小题, 每小题 15 分, 共 90 分）

1. 某产品由甲、乙两车间生产,甲车间占 60%,乙车间占 40%,且甲车间的正品率为 90%,乙车间的正品率为 95%,求:

（1）任取一件产品是正品的概率;

（2）任取一件是次品,它是乙车间生产的概率.

2. 一民航大巴载有 10 位旅客自机场开出,沿途有 4 个站点可供下客,如无人下车就不停车.以 X 表示停车的次数,求 $E(X)$.（设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立,$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\approx 0.05631$）.

3. 设 (X,Y) 在 A 上服从均匀分布,其中 A 为 x 轴, y 轴及直线 $x+y+1=0$ 所围成的区域,求 $E(X),E(Y),E(XY)$.

4. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.5	0.4	0.1

记$Y=X^2$,求:（1）$D(X)$,$D(Y)$;（2）$\mathrm{cov}(X,Y)$.

5. 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

其中$\theta>0$ 为未知参数,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,试求:

（1）θ 的矩估计量; （2）θ 的极大似然估计量.

6. 经验表明,某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（单位: kg）,已知 $\sigma=8$ kg,现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 10 个样品,测得样本均值 $\bar{x}=575.2$ kg. 问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是 570 kg ? （取 $\alpha=5\%$）