全国重点名校系列

新版

全国硕士研究生招生考试

考研专业课精品资料

【电子书】2024年肇庆学院

804数学综合考研精品资料

策划：辅导资料编写组

【初试】2024 年肇庆学院 804 数学综合考研精品资料

说明：本套资料由高分研究生潜心整理编写，高清 PDF 电子版支持打印，考研推荐资料。

一、重点名校真题汇编

1. 附赠重点名校：数学综合相关 2010-2019、2022 年考研真题汇编（暂无答案）

说明：赠送重点名校考研真题汇编，因不同院校真题相似性极高，甚至部分考题完全相同，建议考生备考过程中认真研究其他院校的考研真题。

二、2024 年肇庆学院 804 数学综合考研资料

2. **《数学分析》考研相关资料**

（1）《数学分析》[笔记+提纲]

①肇庆学院 804 数学综合之《数学分析》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段推荐资料。

②肇庆学院 804 数学综合之《数学分析》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《数学分析》考研核心题库（含答案）

①肇庆学院 804 数学综合考研核心题库之《数学分析》证明题精编。

②肇庆学院 804 数学综合考研核心题库之《数学分析》解答题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习推荐资料。

（3）《数学分析》考研题库[仿真+强化+冲刺]

①2024 年肇庆学院 804 数学综合之数学分析考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024 年肇庆学院 804 数学综合之数学分析考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习推荐。

③2024 年肇庆学院 804 数学综合之数学分析考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺推荐资料。

3. **《高等代数》考研相关资料**

（1）《高等代数》[笔记+提纲]

①肇庆学院 804 数学综合之《高等代数》考研复习笔记。

说明：本书重点复习笔记，条理清晰，重难点突出，提高复习效率，基础强化阶段推荐资料。

②肇庆学院 804 数学综合之《高等代数》复习提纲。

说明：该科目复习重难点提纲，提炼出重难点，有的放矢，提高复习针对性。

（2）《高等代数》考研核心题库（含答案）

①肇庆学院 804 数学综合考研核心题库之《高等代数》选择题精编。

②肇庆学院 804 数学综合考研核心题库之《高等代数》计算题精编。

说明：本题库涵盖了该考研科目常考题型及重点题型，根据历年考研大纲要求，结合考研真题进行的分类汇编并给出了详细答案，针对性强，是考研复习推荐资料。

（3）《高等代数》考研题库[仿真+强化+冲刺]

①2024 年肇庆学院 804 数学综合之高等代数考研专业课五套仿真模拟题。

说明：严格按照本科目最新专业课真题题型和难度出题，共五套全仿真模拟试题含答案解析。

②2024 年肇庆学院 804 数学综合之高等代数考研强化五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课强化检测使用。共五套强化模拟题，均含有详细答案解析，考研强化复习推荐。

③2024 年肇庆学院 804 数学综合之高等代数考研冲刺五套模拟题及详细答案解析。

说明：专业课冲刺检测使用。共五套冲刺预测试题，均有详细答案解析，最后冲刺推荐资料。

三、电子版资料全国统一零售价

4．**本套考研资料包含以上一、二部分（高清 PDF 电子版，不含教材），全国统一零售价：[￥]**

特别说明：

①本套资料由本机构编写组按照考试大纲、真题、指定参考书等公开信息整理收集编写，仅供考研复习参考，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权、请联系我们将立即处理。

②资料中若有真题及课件为免费赠送，仅供参考，版权归属学校及制作老师，在此对版权所有者表示感谢，如有异议及不妥，请联系我们，我们将无条件立即处理！

四、2024 年研究生入学考试指定/推荐参考书目（资料不包括教材）

5．**肇庆学院 804 数学综合考研初试参考书**

华东师范大学《数学分析》第五版，2019 年

北京大学《高等代数》第五版，2019 年

五、本套考研资料适用院系

数学与统计学院

目录

2024年肇庆学院804数学综合备考信息

肇庆学院804数学综合考研初试参考书目

华东师范大学《数学分析》第五版，2019年
北京大学《高等代数》第五版，2019年

肇庆学院804数学综合考研招生适用院系

数学与统计学院

2024年肇庆学院804数学综合考研核心笔记

《数学分析》考研核心笔记

第1章 实数集与函数

考研提纲及考试要求

考点：实数及其性质：
考点：实数的一些主要性质
考点：绝对值与不等式
考点：几个重要不等式
考点：有界数集确界原理

考研核心笔记

【核心笔记】实数

1. 实数及其性质

回顾中学中关于有理数和无理数的定义.

有理数：$\begin{cases}\text{能用互质的分数}\dfrac{p}{q}(p,q\text{为非负整数，且}q\neq 0)\text{表示的数}\\ \text{有限十进小数或无限十进循环小数表示的数}\end{cases}$

若规定：

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)99\cdots9\cdots$$

则有限十进小数都能表示成无限循环小数。

当 $x=a_0$ 为整数时，则记为 $x=(a_0-1)9999\cdots$

（1）实数大小的比较

定义1：给定两个非负实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

其中 a_i b_i 为非负整数，$0\le a_i$,$b_i\le 9$ 若由

①$a_k=b_k$，$k=0,1,2,\cdots$ 则称 x 与 y 相等，记为 $x=y$

②若存在非负整数 l，使得 $a_k=b_k$，$(k=0,1,2,\cdots,l)$，而 $a_{l+1}>b_{l+1}$，则称 x 大于 y（或 y 小于 x），分别记为 $x>y$（或 $y<x$）。

规定任何非负实数大于任何负实数；对于负实数 x,y，若按定义1有 $-x>-y$，则称 $y>x$

（2）实数的有理数近似表示

定义2：设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数，称有理数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似值，而有理数称为 x 的 n 位过剩近似值，$n=0,1,2,\cdots$ 对于负实数

$$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

x 的 n 位不足近似值规定为：

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n};$$

x 的 n 位过剩近似值规定为：

$$\bar{x}_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

比如 $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ 则

1. 4, 1. 41, 1. 414, 1. 4142, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的不足近似值；

1. 5, 1. 42, 1. 415, 1. 4143, $\cdots$ 称为 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值。

命题设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$， $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$x > y \iff$ 存在非负整数 n，使得 $x_n > \bar{y}_n$

2. 实数的一些主要性质

（1）四则运算封闭性：

（2）有序性：即 $a > b$ $a < b$ $a = b$，必有一个成立。

（3）传递性：即 $a > b$,$b > c$ $\Rightarrow a > c$

（4）阿基米德性：即 $\forall a, b \in \mathbf{R},\ b > a > 0,\ \exists n \in \mathbf{N},\ \ni\ na > b.$

（5）稠密性：有理数和无理数是稠密性的。

（6）实数集的几何表示———数轴：例如：

$$a = b,\ \iff\ \forall \varepsilon > 0,\ |a - b| < \varepsilon.$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon\ \Rightarrow\ a \le b$$

3. 绝对值与不等式

绝对值定义：$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

从数轴上看：绝对值就是到原点的距离：

4. 几个重要不等式

（1）$a^2 + b^2 \ge 2|ab|$, $|\sin x| \le 1$. $|\sin x| \le |x|$

（2）对 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$，记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\text{（算术平均值）}$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},\text{（几何平均值）}$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.\text{（调和平均值）}$$

$$H(a_i)\le G(a_i)\le M(a_i),$$

等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立.

（3）伯努利不等式

这是由于对$\forall x>0$由二项展开式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n,$$

因此有:$(1+x)^n$大于上式右端任何一项.

【核心笔记】数集确界原理

1. 区间与邻域

（1）区间:

$\{x|a<x<b\}$称为开区间，记为(a,b)

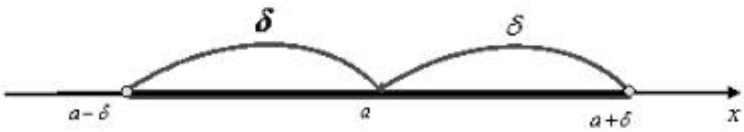
$\{x|a\le x\le b\}$称为闭区间，记为$[a,b]$

半开区间：$\{x|a\le x<b\}$称为半开半闭，记为$[a,b)$

$\{x|a<x\le b\}$称为半开半闭，记为$(a,b]$

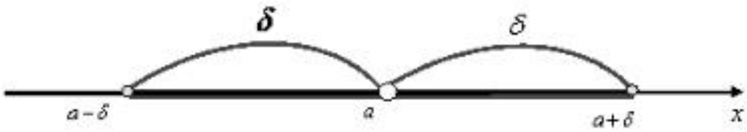
$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$或$(-\infty,+\infty)$为无限区间。

（2）邻域$U_\delta(a)=\{x||x-a|<\delta\}$其中$\delta>0,a\in R$称为$a$的$\delta$邻域，记为$U_\delta(a)$



而点集$U_\delta^0(a)$为点a的去心δ邻域，

即$U_\delta^0(a)=\{x|a-\delta<x<a\}\cup\{x|a<x<a+\delta\}$



2. 有界数集确界原理

（1）有界数集:

定义(上、下有界,有界)

定义 1：设 S 为 R 中的一个数集。若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\le M(x\ge L)$，则称 S 为有上界（下界）的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界 S（下界）。若数集 S 既有上界又有下界，则 S 为有界集，若 S 不是有界. 则称 S 为无界集。

例如：闭区间、(a,b)(a、b 为有限数）、邻域等都是有界数集，集合 $E=\{y|\ y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)\}$ 也是有界数集.

（2）无界数集:对任意 $M>0$，存在 $\overline{x}\in S$，$|\overline{x}|>M$，则称 S 为无界集。

$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 等都是无界数集,例证明集合是无界数集

（3）上下确界

先给出确界的直观定义：若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，其中最小的一个上界我们称它为数集 S 的上确界；同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界。

精确定义

定义 2：设 S 是 R 中的一个数集，若数 η 满足一下两条：

①对一切 $x\in S$ 有 $x\le\eta$，即 η 是数集 S 的上界；

②对任何 $\alpha<\eta$ 存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0>\alpha$（即 η 是 S 的最小上界）

则称数 η 为数集 S 的上确界。记作 $\eta=\sup S$

定义 3：设 S 是 R 中的一个数集，若数 ξ 满足以下两条：

对一切 $x\in S$ 有 $x\ge\xi$，即 ξ 是数集 S 的下界；

对任何 $\beta>\xi$ 存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0<\beta$（即 ξ 是 S 的最大下界）

则称数 ξ 为数集 S 的下确界。记作 $\xi=\inf S$

定理 1.1(确界原理). 设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。

数集与确界的关系:确界不一定属于原集合。

（4）确界与最值的关系:设 E 为数集.

①E 的最值必属于 E,但确界未必,确界是一种临界点.

②非空有界数集必有确界(见下面的确界原理),但未必有最值.

③若 $\max E$ 存在,必有 $\max E=\sup E$.

对下确界也有类似的结论.

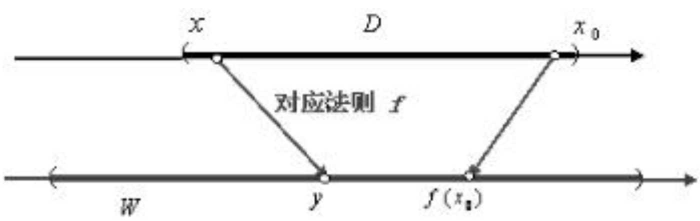
【核心笔记】函数概念

1. 函数的定义

函数的几点说明.

函数的两要素:定义域和对应法则

约定:定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.



2. 函数的表示法

解析法,列表法,图像法.

分段函数:

《高等代数》考研核心笔记

第 1 章　多项式

考研提纲及考试要求

考点：多项式的加、减、乘运算及运算律
考点：带余除法
考点：整除
考点：最大公因式
考点：互素
考点：最大公因式与互素概念的推广
考点：不可约多项式

考研核心笔记

【核心笔记】数域

代数性质：关于数的加减乘除等运算性质引入：关于数的范围的讨论

定义：设 P 是一些复数组成的集合，其中包括 0 和 1，如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为 0）仍是 P 中的数，那么称 P 为一个数域。

另一说法：如果包含 0 和 1 的一个数集 P，对于加减乘除（除数不为 0）运算都是封闭的，那么称 P 为一个数域。

重要结论：最小数域为有理数域（任何数域包含有理数域）

【核心笔记】一元多项式

1.一元多项式的概念

定义：设 n 是一非负整数，x 是一个符号（文字），形式表达式：

$a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+...+a_1x_1+a_0$ 其中 $a_i(i=0...n)\in P$。称为系数在数域 P 中的一元多项式。（数域 P 上的一元多项式）

（1）记

$$f(x)=a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+...+a_1x_1+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$g(x)=b_mx_m+b_{m-1}x_{m-1}+...+b_1x_1+b_0=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

（2）其中 $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 称为 $f(x)$ 的 i 次项 a_i 为 i 次项系数。

（3）$a_n\neq 0$，则 a_nx^n 为 $f(x)$ 的首项 a_n 为首项系数，n 为 $f(x)$ 的次数。记 $\partial(f(x))=n$。

（4）所有系数均为 0 的多项式称为零多项式，记 0（唯一不定次数）

（5）$f(x)=g(x)\Leftrightarrow$ 除去系数为 0 的项外，同次项系数均相等。（注意 0 多项式与 0 次多项式的区

别）

2.多项式的加、减、乘运算及运算律

设

$$f(x)=a_nx_n+a_{n-1}x_{n-1}+...+a_1x_1+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$g(x)=b_mx_m+b_{m-1}x_{m-1}+...+b_1x_1+b_0=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

补充系数为 0 的项，使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同多的项数后

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \quad \partial(f+g)\le\max(\partial f,\partial g)$$

$$f(x)\ g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}(\sum_{j+i=s}a_ib_j)x^s \quad \partial(fg)=\partial f+\partial g$$

f，g 均不为 0 多项式

算律：

（1）加法交换律 $f+g=g+f$

（2）法结合律 $(f+g)+h=f+(g+h)$

（3）乘法交换律 $f\cdot g=g\cdot f$

（4）乘法结合律 $(fg)h=f(gh)$

（5）乘法对加法的分配率 $f(g+h)=fg+fh$

（6）乘法消去律 $fg=fh$ 且 $f\ne0$，则 $g=h$（$fg-fh=0$ $f(g-h)=0$ $f\ne0$ 则 $g-h=0$ $g=h$）

3.一元多项式环的概念

所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，记 $P[x]$ P 为系数域

常用数学归纳法：关于自然数的命题

（1）当初始值时，命题成立

（2）假设小于或等于 $n-1$ 时，命题成立，往证 n 时，命题成立

反证法：

（1）假设结论成立

（2）按照正确分析，综合方法，退出与已知或事实矛盾的结果

（3）结论成立

【核心笔记】整除的概念

1.带余除法

引例

$$f(x)=x^3-3x^2-x-1\ g(x)=3x^2-2x+1\ g(x)=3x^2-2x+1$$

$$\begin{array}{r|c|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\hline
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\hline
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}$$

于是

$$f(x)=(\tfrac{1}{3}x-\tfrac{7}{9})g(x)+(-\tfrac{26}{9}x-\tfrac{2}{9})$$

商式余式

带余除法定理：

对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，一定有 $P[x]$ 中的 $q(x)$，$r(x)$ 存在，使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立。

其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)$ =0，并且 $q(x)$ 与 $r(x)$ 是唯一确定的。

证明：

$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 中 $q(x)$ 是商式，$r(x)$ 是余式。

2.整除

定义：如果存在 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ 成立。那么称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记做 $g(x)\mid f(x)$。

$g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$

（1）$g(x)$ 整除 $f(x)$ 时 $g(x)$ 称为因式，$f(x)$ 为倍式

（2）$g(x)\neq 0$ 时，$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)$ =0

（3）$0|0$ 有意义且 0 只能整除 0 多项式。零次多项式只能被零次多项式整除。

$f(x)|f(x)$ $f(x)|0$ $a\mid f(x)$ （$a\neq 0$）

性质：

（1）$f\mid g$，$g\mid f\Rightarrow f=c\cdot g$ c 为非零常数

（2）$f\mid g$，$g\mid h\Rightarrow f\mid h$

（3） $f\mid g_i$，$i=1,2,\cdots r\Rightarrow f\mid(u_1g_1+u_2g_2+\cdots u_rg_r)$，其中 u_i 是任意多项式。分别证明之。

结论：

（1） f 与 cf 具有相同的因式与倍式，讨论时可互相替代。

（2）两个多项式的整除关系不引文为系数域的扩大而改变。

【核心笔记】最大公因式

1.最大公因式

公因式：$\varphi(x)\mid f(x)$，$\varphi(x)\mid g(x)$ 则称 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个公因式

定义：对于 $f(x)$，$g(x)$ 若 $d(x)$ 满足：

（1） $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式

（2） $\forall h(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式，有 $h(x)\mid d(x)$，则称 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式。

引理：$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，那么 $f(x)$，$g(x)$ 和 $g(x)$，$r(x)$ 有相同的公因式。

存在性：

（1） $f=g=0$ $d=0$

（2） $f=0$，$g\neq 0$ $d=g$

（3） $f\neq 0$，$g\neq 0$ 时定理：对于 f，g，一定存在 d，且 d 可表示成 f，g 的一个组合，即 $d=uf+vg$

证：$f=gq_1+r_1$ f，g 与 g，r_1 有相同的公因式

$g=r_1q_2+r_2$ g，r_1 与 r_1，r_2 有相同的公因式

$r_1=r_2q_3+r_3$ r_1，r_2 与 r_2，r_3 有相同的公因式

…

$r_{s-2}=r_{s-1}q_s+r_s$ …

$r_{s-1}=r_sq_{s+1}$

又因 $\partial g>\partial r_1>\partial r_2>\cdots>\partial r_s>\cdots$，故有限次必可整除，即 $r_{s+1}=0$，于是 r_s 是 f，g 的最大公因式。

又由 $r_s=r_{s-2}-r_{s-1}q_s$ 回推至最后即得 $d=uf+vg$ 得证。

唯一性：

（1）若 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式，则 cd 也是。c 为任意非零常数。

（2）令取首项系数是 1 的最大公因式，则唯一。记做 $d=(f,g)$

2024 年肇庆学院 804 数学综合考研复习提纲

《数学分析》考研复习提纲

数学分析（Ⅰ）

一、　函数

实数概述，绝对值与不等式。

区间与邻域，确界原理。

函数概念，函数的几种表示法，函数的四则运算，复合函数，反函数，基本初等函数，初等函数。

具有某些特性的函数。

二、　数列极限

数列，数列极限的 ε -N 定义。

收敛数列的性质：唯一性、有界性、保序（号）性、迫敛性、四则运算法则。

数列极限存在的条件。

三、　函数极限（

函数极限的 ε -M 定义和 ε - δ 定义，单侧极限。

函数极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性、不等式性质、迫敛性、四则运算。

函数极限存在的条件：归结原则和柯西准则。

两个重要极限。

无穷小量及其阶的比较；记号 O，o，$\sim$；无穷大量及其阶的比较。

四、 函数的连续性

连续性概念，间断点及其分类，在区间上连续的函数。

连续函数的性质：局部有界性、局部保号性、四则运算、复合运算，闭区间上连续函数的性质，反函数的连续性，一致连续性。

初等函数的连续性。

五、导数与微分

导数概念：导数的定义（导数、左导数、右导数以及与连续性间关系）。导数几何意义、物理意义。导函数的概念。

求导法则：导数的四则运算。反函数的导数。复合函数的导数。基本求导法则与公式。

微分：微分概念。微分的运算法则（一阶微分形式的不变性）。

近似计算与误差估计。

高阶导数及运算（注意：莱布尼兹公式）。高阶微分。

参量方程所确定的函数的导数。

六、微分学基本定理与不定式极限

中值定理：费马（**Fermat**）定理——予备定理。中值定理（**Rolle、Lagrange、Cauchy** 三大中值定理）。导数极限定理。

不定式极限：$\frac{0}{0}$ 型不定式极限。$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限。其它类型的不定式极限（$0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ 等类型）

泰勒定理。带皮亚诺（**Peano**）型余项的泰勒公式。应用（近似计算，求极限）。

七、运用导数研究函数的性质

函数的单调性。极值的必要条件。极值的两个充分条件（第三个充分条件可作选讲内容）。最大值与最小值。

函数的凸性与拐点的概念。函数凸性的判定。函数凸性的应用。

渐近线。函数作图。

方程近似解。

八、实数的一些基本定理

确界与确界存在定理。区间套定理。柯西收敛准则。致密性定理。聚点定理。有限复盖定理。

关于闭区间上连续函数性质的几个定理的严格证明。

九、不定积分

原函数与不定积分概念。基本积分表。线性运算法则。换元积分法。分部积分法。

有理函数积分法。三角函数有理式的积分.几种无理函数的积分。

十、定积分

曲边梯形面积与变力作功——引出定积分概念。定积分定义。定积分的几何意义。可积的必要条件。(达布)上和、下和及其性质。可积的充要条件。

可积的充分条件——可积函数类(闭区间上的连续函数,有有限个间断点的有界函数,单调有界函数)。

定积分的性质:线性运算性质,对区间的可加性、单调性、绝对可积性、积分(第一)中值定理。积分第二中值定理。

微积分学基本定理(原函数存在定理)。**Newton-Leibniz** 公式。定积分的换元法。定积分的分部积分法。

用 $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ 定义对数函数,对数函数与指数函数的基本性质。

2024 年肇庆学院 804 数学综合考研核心题库

《数学分析》考研核心题库之证明题精编

1. 设函数 f(x)在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在(有限). 证明: (1) $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续; (2) $f(x)$在$[a,+\infty)$上有界，讨论$f(x)$在$[a,+\infty)$上的最值; (3)逆命题“$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在”是否成立? (请给出证明或反例).

【答案】(1)因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，由 Cauchy 准则，$\forall\varepsilon>0$、$\exists M>0$，当$x',x''>M$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 将区间$[a,+\infty)$分成两段$[a,M+1]$和$(M,+\infty)$.

f(x) 在 $[a,M+1]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续. 对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $x',x''\in[a,M+1],|x'-x''|<\delta_1$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

令$\delta=\min\{1,\delta_1\}$，当$x',x''>a,|x'-x''|<\delta$时，$x',x''$要么同属于$[a,M+1]$，要么同属于$(M,+\infty)$，两种情况都有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 于是$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

(2)不妨记$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，对$\varepsilon=1$，存在正数 M，当$x>M$时，有$|f(x)-A|<1$. 从而$|f(x)|<|A|+1$

因$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，故$f(x)$在$[a,M]$上连续，从而有界，于是存在正数G_1，对任给$x\in[a,M]$有$|f(x)|\leqslant G_1$. 取$G=\max\{G_1,|A|+1\}$，则对任何$x\in[a,+\infty)$有$|f(x)|\leqslant G$. 故$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

$f(x)$在$[a,+\infty)$上必有最大值或最小值. 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leqslant f(a)$时，f(x)在$[a,+\infty)$上有最大值；当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geqslant f(a)$时，$f(x)$在$[a,+\infty)$上有最小值;当$f(x)\equiv f(a)$时，f(x)有最大值与最小值.

(3)逆命题不一定成立. 例如，$f(x)=\sin x$在$[a,+\infty)$上一致连续，但$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x$不存在.

结论说明:若，$x\to+\infty$时，$f(x)$的图像趋于水平状态，则 f(x)在$[a,+\infty)$上一致连续.

2. 设$g(t)=\oiint\limits_{\Sigma_t}zf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma_t$为球面$x^2+y^2+z^2=t^2(t\geqslant0)$的外侧，f(x, y)在点(0, 0)连续证明：$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{g(t)}{t^3}=\frac{4\pi}{3}f(0,0)$.

【答案】对$\forall\varepsilon>0$，因为 f(x, y)在点(0, 0)连续，所以$\exists\delta>0$，当$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时有$|f(x,y)-f(0,0)|<\frac{3}{4\pi}\varepsilon$. 从而当$0<t<\delta$时有

$$\left|\frac{1}{t^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}[f(x,y)-f(0,0)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|<\frac{1}{t^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{3}{4\pi}\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}[f(x,y)-f(0,0)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{g(t)}{t^3}=\frac{4\pi}{3}f(0,0)$$

3. (1)证明函数项顶数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上收敛，对任意的 $\delta>0$，在 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上一致收敛；(2) 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$，证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续。

【答案】因为

$$2\sin\frac{x+\pi}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx\right]=2\sin\frac{x+\pi}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x+\pi)\right]$$
$$=\sin\frac{x+\pi}{2}+\left[\sin\frac{3(x+\pi)}{2}-\sin\frac{x+\pi}{2}\right]+\cdots+\left[\sin\frac{(2n+1)(x+\pi)}{2}-\sin\frac{(2n-1)(x+\pi)}{2}\right]$$
$$=\sin\frac{(2n+1)(x+\pi)}{2}$$

当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时，$\sin\frac{x+\pi}{2}\neq 0$，故得到

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx=\frac{\sin\frac{(2n+1)(x+\pi)}{2}}{2\sin\frac{x+\pi}{2}}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos nx$ 的部分和数列当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时有界，由 Dirichlet 判别法推得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$ 在 $x\in(-\pi,\pi)$ 上收敛。

当 $x\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 时，由上面的式子得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{2}+\left|\frac{\sin\frac{(2n+1)(x+\pi)}{2}}{2\sin\frac{x+\pi}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\left|\sin\frac{x+\pi}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$$

即 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos nx$ 的部分和数列当 $x\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 时一致有界，又 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调递减一致趋于 0，故由 Dirichlet 判别法推得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上一致收敛。

(2) 对任意的 $x\in(-\pi,\pi)$，取 $\delta=\frac{\pi-|x|}{2}$，则 $x\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$。由 (1) 知 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上一致收敛，由 $(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 x 处连续。再由 x 的任意性知，f(X) 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续。

4. **证明**

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 x=0 处 n 阶可导，且 $f^{(n)}(0)=0$，其中 n 为任意正整数.

【答案】先用数学归纳法证明 $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)(x\neq0)$，这里 $P_n(t)$ 是 t 的多项式.

当 n=1 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}(x\neq0)$，结论成立.

设当 n=k 时结论成立，即 $f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)(x\neq 0)$，$P_k(t)$是 t 的某多项式，则当 n=k+1 时有

$$f^{(k+1)}(x)=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x^2}}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\left[2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right]=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\neq 0),$$

其中 $P_{k+1}(t)$是 t 的另一多项式. 故对一切正整数 n 结论都成立.

下面再用归纳法证明：对 $\forall n, f^{(n)}(0)$存在且等于 0. 因为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0,$$

假设 $f^{(k)}(0)=0$，则当 $n=k+1$ 时，

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}P_k^*\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

这里 $P_k^*\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)$是 $\frac{1}{x}$ 的多项式. 由归纳法知对任意的正整数 n 都有 $f^{(n)}(0)=0$.

5. **设函数 f(x) 定义在 $(a,+\infty)$ 上，在每一个有限区间 (a,b) 内有界，并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.**

【答案】由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $M_1>0$，使得当 $x\geqslant M_1$ 时，有

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+1)-f(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

于是有

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)-f(x-1)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x-1)-f(x-2)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x-[x-M_1]+1)-f(x-[x-M_1])<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

将这些式子相加有

$$[x-M_1]\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)<f(x)-f(x-[x-M_1])<[x-M_1]\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

由于 f(x) 在 $[M_1,M_1+1]$ 上有界，即存在 $C>0$，使得当 $x\in[M_1,M_1+1]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant C$，从而 $|f(x-[x-M_1])|\leqslant C$. 于是

$$A-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{M_1+1+C}{x}<\frac{f(x)}{x}<A+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C}{x}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{M_1+1+C}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C}{x}=0$，所以存在 $M_2>0$，使得当 $x>M_2$ 时，有

$$\left|\frac{M_1+1+C}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\left|\frac{C}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是取 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则当 $x>M$ 时，有

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

6. 设 0<r<1，$x\in\mathbf{R}$ 。证明：

(1) $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$;

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x=0$.

【答案】(1)把欲证明的等式经移项后写为 $\dfrac{\cos x-r}{1-2r\cos x+r^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos nx$ 。由于

$$(1-2r\cos x+r^2)\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\cos kx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\cos kx+\sum_{k=1}^{n}r^{k+1}\cos kx-2\sum_{k=1}^{n}r^k\cos kx\cos x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}r^k\cos(k+1)x+\sum_{k=2}^{n+1}r^k\cos(k-1)x-2\sum_{k=1}^{n}r^k\cos kx\cos x$$

且 $\cos(k+1)x+\cos(k-1)x=2\cos kx\cos x$，所以

$$(1-2r\cos x+r^2)\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\cos kx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}r^k\cos(k+1)x+\sum_{k=2}^{n+1}r^k\cos(k-1)x-2\sum_{k=1}^{n}r^k\cos kx\cos x$$

$$=\cos x+r\cos 2x+r^n\cos(n-1)x+r^{n+1}\cos nx-2r\cos^2x-2r^n\cos nx\cos x$$

$$=\cos x-r+r^n\cos(n-1)x+r^{n+1}\cos nx-2r^n\cos nx\cos x$$

于是

$$(1-2r\cos x+r^2)\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos nx=\lim_{n\to\infty}\left[\cos x-r+r^n\cos(n-1)x+r^{n+1}\cos nx-2r^n\cos nx\cos x\right]=\cos x-r$$

故有 $\dfrac{\cos x-r}{1-2r\cos x+r^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos nx$，即 $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$ 。

(2)由(1)的结论知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln(1-2r\cos x+r^2)=\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}=-2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos nx$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos nx$ 关于 r 在 $[0,r]$ 上是一致收敛的，所以

2024 年肇庆学院 804 数学综合考研题库[仿真+强化+冲刺]

肇庆学院 804 数学综合之数学分析考研仿真五套模拟题

2024 年数学分析五套仿真模拟题及详细答案解析（一）

一、证明题

1. 证明下列命题.

（1）设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，满足$0\leqslant f(x)\leqslant x$，$x\in[0,+\infty)$，设$a_1\geqslant 0$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n=1,2,\cdots$.

证明：①$\{a_n\}$为收敛数列；②设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有$f(t)=t$；③若条件改为$0\leqslant f(x)<x$，$x\in(0,+\infty)$，则 t=0.

（2）设$f(x)$在$[0,a]$上有二阶连续导数. $f'(0)=1$，$f''(0)\neq 0$，$0\leqslant f(x)<x$，$x\in(0,a)$. 设$x_1\in(0,a)$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：①$\{x_n\}$为收敛数列并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；②$\{nx_n\}$是否收敛？若不收敛，则说明理由. 若收敛. 则求极限.

【答案】①因$0\leqslant f(x)\leqslant x$，$x\in[0,+\infty)$，故$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n\leqslant 0$，$n=1,2,\cdots$. 这表明$\{a_n\}$为单调递减数列. 又因$a_1\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$，$a_{n+1}=f(a_n)$. 所以$a_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$. 从而数列$\{a_n\}$单调递减有下界，故$\{a_n\}$为收敛数列.

②因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$t\in[0,+\infty)$，故

$$t=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=f(t).$$

③由$a_n\geqslant 0$及$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$知$t\geqslant 0$. 若$t\neq 0$，则$t>0$且$f(t)<t$，这与$f(t)=t$矛盾. 所以 t=0.

（2）由（1）知$\{x_n\}$为收敛数列. 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 下证：$\{nx_n\}$收敛.

由$0\leqslant f(x)<x$得$f(0)=0$. 由泰勒公式$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$. 由 stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right)}{x-\left(x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right)}{-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2}=-\frac{2}{f''(0)}.$$

故$\{nx_n\}$为收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=-\frac{2}{f''(0)}$.

2. 设二元函数 f（x, y）的两个混合偏导数$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$在（0, 0）点附近存在，且$f_{xy}(x,y)$在（0, 0）点连续. 证明：$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

【答案】记$I=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0+\Delta y)-f(0+\Delta x,0)+f(0,0)$，

$$\varphi(x)=f(x,0+\Delta y)-f(x,0),\ \phi(y)=f(0+\Delta x,y)-f(0,y),$$

则$I=\varphi(0+\Delta x)-\varphi(0)$和$I=\phi(0+\Delta y)-\phi(0)$.

一方面，

$$\begin{aligned} I &= \varphi'(0+\theta_1\Delta x)\Delta x \\ &= [f_x(0+\theta_1\Delta x,0+\Delta y)-f_x(0+\theta_1\Delta x,0)]\Delta x \\ &= f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \quad (0<\theta_1,\theta_2<1) \end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} I &= \phi'(0+\theta_3\Delta y)\Delta y \\ &= [f_y(0,\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)]\Delta y \quad (0<\theta_3<1) \end{aligned}$$

由上面两式，有

$$\frac{f_y(0+\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)}{\Delta x}=f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)$$

由$f_{xy}(x,y)$在（0,0）点的连续性，可知

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)=f_{xy}(0,0)$$

于是，有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f_y(0+\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)}{\Delta x}=f_{xy}(0,0)$$

特别地，当$(\Delta x,\Delta y)$沿着直线$\Delta y=0$趋向于（0,0）时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=f_{yx}(0,0)=f_{xy}(0,0)$$

3. **设函数 f（x），g（x）均为定义在[a，b]上的有界函数. 证明：若仅在[a，b]中有限个点处$f(x)\neq g(x)$，则当函数 f（x）在[a，b]上可积时，g（x）在[a，b]上也可积，并且有**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

【答案】不妨假设 F（x）=g（x）-f（x），则 F（x）仅在[a，b]中有限个点处不为零，从而 F（x）在[a，b]上可积，且对[a，b]作任意划分P：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$使得$F(\xi_i)=0$，则

$$\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i=0$$

F（x）在[a，b]上可积，从而

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i=0$$

对任意划分 P 和每个$\xi'_i\in[x_{i-1},x_i]$，有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n g(\xi'_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (g(\xi'_i)-f(\xi'_i))\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f(\xi'_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n F(\xi'_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f(\xi'_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

F（x），f（x）在[a，b]上可积，令$\lambda\to 0$(其中$\lambda=\max_i\{\Delta x_i\}$)取极限得到 g（x）在[a，b]上也可积，并且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

4. **设 A 为三阶实对称方阵，定义函数**

$$h(x,y,z)=(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

证明：h（x. y. z）在条件$x^2+y^2+z^2=1$下的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

【答案】应用 Lagrange 乘数法，令

$$L(x,y,z,\lambda)=h(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

对 L 求一阶偏导数，并令它们都等于 0，则有

$$\begin{cases}\nabla_{(x,y,z)}L=2A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+2\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

由此方程组知解$-\lambda$为 A 的特征值，（x，y，z）为相应的特征向量，此时$h(x,y,z)=-\lambda$. 又叫最大值只能在这些解中取到，故 h（x，y，z）在条件$x^2+y^2+z^2=1$下的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

5. **设$f(x)$在[a，b]上有定义，且$f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$. 在以下两种情况下，证明：存在一点$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)=\xi$.**

（1）设$f(x)$在$[a,b]$上连续；（2）设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加但未必连续.

【答案】（1）设$F(x)=f(x)-x$，则$f(x)$在[a，b]上连续，且$F(a)=f(a)-a\geqslant 0$，$F(b)=f(b)-b\leqslant 0$.

若$F(a)=0$，则 f（a）=a，即 a 为$f(x)$的不动点. 若$F(b)=0$，则 f（b）=b，即 b 为$f(x)$的不动点.

若 F(a)＞0，F(b)＜0，则由根的存在性定理，在(a，b)的内至少有一个点x_0，使$F(x_0)=0$，即$f(x_0)=x_0$，亦即x_0为$f(x)$的不动点.

综上所述，$f(x)$在[a，b]内至少有一个不动点.

（2）设$f(x)$在[a，b]上单调增加. 作曲线$y=x$，易知$A(a,f(a))$在$y=x$上方，$B(b,f(b))$在$y=x$的下方.

取[a，b]的中点$c_1=\dfrac{a+b}{2}$，若点$C(c_1,f(c_1))$在直线 y=x 上即证. 否则点 C 或在直线上方或在直线下方. 总之，存在$[a_1,b_1]$使$A(a_1,f(a_1))$在$y=x$上方，$B(b_1,f(b_1))$在 y=x 的下方.

这样继续下去，存在区间套$\{[a_n,b_n]\}$，满足：

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

$$a_n<f(a_n),f(b_n)<b_n.b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0\,(n\to+\infty).$$

由区间套定理，$\exists\xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

由$f(x)$单调不减，对$\forall n$有$a_n\leqslant b_n$，且$a_n<f(a_n)\leqslant f(\xi)\leqslant f(b_n)<b_n$. 让$n\to\infty$得$\xi\leqslant f(\xi)\leqslant\xi$. 于是$f(\xi)=\xi$.

6. **证明下列结论.**

（1）设函数 u=f（z），其中 z 由方程$z=x+y\varphi(z)$确定，f,φ为可微函数. 证明：$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

（2）设函数 u=u（x，y）由方程$u=y+x\varphi(u)$确定，证明$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$.

（3）设函数 u=f（z），z 由方程$z=x+y\varphi(z)$确定，$f(z)$，$\varphi(z)$任意阶可微. 试证明：

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

【答案】（1）对方程 $z=x+y\varphi(z)$ 两边求微分得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\varphi(z)\mathrm{d}y+y\varphi'(z)\mathrm{d}z$$

于是

$$z_x=\frac{1}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'}=\varphi z_x.$$

所以

$$u_x=f'(z)z_x=f'(z)\frac{1}{1-y\varphi'},u_y=f'(z)z_y=f'(z)\frac{\varphi}{1-y\varphi'},$$

故 $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$

（2）由 $u_x=\varphi+x\varphi' u_x$ 有 $u_x=\frac{\varphi}{1-x\varphi'}$ 由 $u_y=1+x\varphi' u_y$ 有 $u_y=\frac{1}{1-x\varphi'}$ *所以

$$u_{xx}=\frac{\varphi' u_x(1-x\varphi')-\varphi(-\varphi'-x\varphi'' u_x)}{(1-x\varphi')^2}=\frac{1}{(1-x\varphi')^2}\left(2\varphi\varphi'+\frac{x\varphi^2\varphi''}{1-x\varphi'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi^2(u)u_y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi^2}{1-x\varphi'}\right)=\frac{2\varphi\varphi' u_y(1-x\varphi')-\varphi^2(-x\varphi'' u_y)}{(1-x\varphi')^2}=\frac{1}{(1-x\varphi')^2}\left(2\varphi\varphi'+\frac{x\varphi^2\varphi''}{1-x\varphi'}\right)$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

（3）对方程 $z=x+y\varphi(z)$ 求微分得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\varphi(z)\mathrm{d}y+y\varphi'(z)\mathrm{d}z$$

于是

$$z_x=\frac{1}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'},z_y=\frac{\varphi}{1-y\varphi'}=\varphi z_x.$$

所以

$$u_x=f'(z)z_x=f'(z)\frac{1}{1-y\varphi'},u_y=f'(z)z_y=f'(z)\frac{\varphi}{1-y\varphi'}.$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$.

假设 n=k−1 时成立 $\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}=\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}\left(\varphi^{k-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. 下证：当 n=k 时，$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 成立.

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}\left(\varphi^{k-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}\partial y}\left(\varphi^{k-1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

附赠重点名校：数学综合相关 2010-2019、2022 年考研真题汇编（暂无答案）

第一篇、2022 年数学综合相关考研真题汇编

2022 年桂林理工大学 614 数学综合考研专业课真题

桂林理工大学 2022 年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码：614
考试科目名称：**数学综合**

（总分 150 分，三小时答完）

考生注意：请将答题写在答卷纸上，写在试卷上视为无效。

一 、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1．已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2dt$ 是 x^n 的同阶无穷小量，则 n 等于【　　】

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

2．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，则以下说法正确的是【　　】

A．当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq 1$ 时，$y=1$ 有可能是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线

B．当 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线存在且斜率为 1

C．当 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq\infty$ 时，$x=1$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线

D．以上说法均不对

3．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则下列说法错误的是【　　】

A．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

C．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$（$k$ 为常数）收敛

4．设函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 有连续的偏导数，且 $f(x,y)dx+g(x,y)dy$ 为函数 $u(x,y)$ 的全微分，则下面等式必成立的是【　　】

A．$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$　　B．$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial y}$　　C．$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$　　D．$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}$

5．设 A 为 n 阶方阵，经过若干次初等变换后得到矩阵 B，则 A 与 B【　　】

A．相等　　B．合同　　C．相似　　D．等价

6．设向量组 α,β,γ 线性无关，β,γ,δ 线性相关，则【　　】

A．α 必由 β,γ,δ 线性表示　　B．γ 必由 α,β,δ 线性表示

C．β 必由 α,γ,δ 线性表示　　D．δ 必由 α,β,γ 线性表示

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1．设函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sin(x-1)}$，则 $f(x)$ 的第二类间断点为_________.

2．微分方程 $(x+1)y'+y^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解为__________.

3．曲线 $y=\dfrac{e^x}{(1+x)^2}$ 在 $(0,1)$ 点的切线方程为________.

4．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{3x-5z}+3y$ 确定，则 $5\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

5．设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=6$，则行列式 $|(2A^*)^{-1}-A|=$______(A^* 为 A 的伴随矩阵).

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 0\\ -2 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 7\end{pmatrix}$，则矩阵 A 对应的是________(正定、负定、不定) 二次型.

三、计算和证明题（共 114 分）

1.（10 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{3/2}}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}-2\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$.

2.（12 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n2^{2n}(1+x)^n x^n$ 的收敛域.

3.（10 分）求 $\iint\limits_D \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$ 的值，积分区域 D：$0\le y\le\sqrt{4-x^2}$.

4.（10 分）证明：函数 $z=(1+e^y)\sin x-ye^y$ 有无穷多个极大值点.

5.（10 分）设 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\dfrac{a_i}{2i-1}=0$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cos(2i-1)x=0$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内至少存在一个根.

6.（12 分）设 $f(t)=\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+t}(t\ge 1)$，求 $f'(4)$.

7. （12 分）求函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ 的单调区间.

8. （10 分） 设矩阵 A,B 为 n 阶方阵，满足 $2A+B=2AB$， E 为 n 阶单位矩阵，证明 $E-2A$ 可逆，并求 $(E-2A)^{-1}$.

9. （14 分）已知方程组 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=1\\ \lambda x_1+3\lambda x_2+3x_3=30-\lambda^3\\ x_1+3x_2+(\lambda-2)x_3=10-\lambda^2\end{cases}$ ，问 λ 为何值，方程有：

（1）唯一解，并求出解.
（2）无穷多解，并求出解.
（3）无解.

10. （14 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & x & 2\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 x,y.
（2）求可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

2022 年湖南师范大学 958 数学基础综合考研专业课真题

湖南师范大学 2022 年硕士研究生招生考试初试

自命题科目试题册

业务课代码：958

业务课名称：数学基础综合

满分：150 分　　　　　　考试时间：3 小时

考生须知：1、答案必须写在答题纸上，写在其它纸上无效。

2、答题时必须使用蓝、黑色墨水笔作答，用其他笔答题不给分。不得使用涂改液。

数学分析部分（共 90 分）

一、填空题(每小题 4 分，共 20 分.)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\sqrt{n^2+n\pi})|$____________.

2. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在(1,1,1)处的法线方程为________.

3. 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{|\sin x|}{(1+x)^l}dx$ 存在，则 l 满足________.

4. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的收敛域为________.

5. 设 A 为二元函数 $f(x,y)=x^2+xy$ 的极值点全体，则 A=________.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分.)

6. 定义函数 $f(x)$如下

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x\neq 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)^2}\right], & x=0\end{cases},$$

求 $f'(0)$.

7. 设函数 $f(x)$连续可导，$f'(0)=0$，$f''(0)=1$. 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}.$$

8. 设 V 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围的立体. 求 V 的体积.

9. 已知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2+y^2}{x}$，$z(1,y)=\sin y$. 求 $z(x,y)(x>0)$ 的表达式.

三、证明题(第 10-12 每小题 10 分，第 13 题 8 分，共 38 分.)

10. 设函数 f 在区间$[0,1]$上连续，且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^n$ 在区间$[0,1]$上处处收敛. 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^n$ 在$[0,1]$上绝对收敛.

11. 设数列 $\{a_n\}_n$ 单调增加，且 $a_n \geq 1$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}$ 收敛.

12. 设 f 在$[a,b]$上可积，定义 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

(i) (4 分) 证明：$\Phi(x)$ 在$[a,b]$上连续；

(ii) (6 分) 证明：若 f 在$[a,b]$上连续，则 $\Phi(x)$ 在$[a,b]$上处处可导.

13. 已知常数 $k \geq \ln 2-1$. 证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$.

高等代数部分（60分）

一. 填空题(本题共6小题,每小题5分,共30分)

1. 当λ______时,线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3 = 1\\ x_1+\lambda x_2+x_3 = \lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3 = \lambda^2\end{cases}$ 无解.

2. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 9 & 25\\ 1 & 16 & 81 & 625\end{vmatrix}$ 的值是______.

3. n元实二次型按其标准形来分类,共有______类.

4. 向量组$\beta_1=(1,-1,2,4),\beta_2=(0,3,1,2),\beta_3=(3,0,7,14),\beta_4=(1,-1,2,0)$, $\beta_5=(2,1,5,6)$ 的一个极大无关组为______.